रेखामितितत्व

श्रीमन्महाराजाधिराज पश्चिमदेशाधिकारी
श्रीयुत नव्वाब लेफ्टिनेंट गवर्नर बहादुर की

आज्ञानुसार

श्रीमद्विद्या संपन्न श्री साहिब डैरेक्टर आफ पब्लिक्
इन्स्ट्रक्शन् मुमालिक मग़रबी की

अनुमति से

पश्चिमदेशीय चटशालों के विद्यार्थियों के लिये
पण्डित कुंजबिहारीलाल ने
अंगरेज़ी से हिंदी भाषा में उल्था किया ॥

इलाहाबाद

गवर्नमेंट के छापेखाने में छापा गया
सन् १८६१ ई०

2nd Edition, 5,000 copies, Price per copy, 8 Annas.

दूसरी बार ५,००० पुस्तकें मोल फी पुस्तक ॥) आने

रेखामितितत्व

श्रीमन्महाराजाधिराज पश्चिमदेशाधिकारी
श्रीयुत नव्वाब लेफ्टिनेट गवर्नर बहादुर की

आज्ञानुसार

श्रीमद्विद्या संपन्न श्री साहिब डैरेक्टर आफ पबलिक्
इन्स्ट्रक्शन् मुमालिक मग़रबी की

अनुमति से

पश्चिमदेशीय चटशालों के विद्यार्थियों के

लिये

पण्डित कुंजबिहारीलाल ने

अंगरेज़ी से हिन्दी भाषा में उल्था किया ॥

इलाहाबाद

गवर्नमेंट के छापेखाने में छापा गया

सन् १८६१ ई०

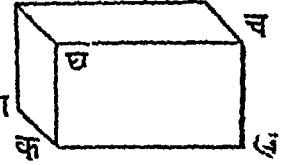
रेखामितितत्व का सूचीपत्र

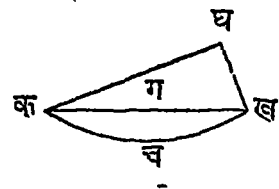
आशय पृष्ठ

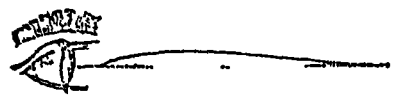
रेखागणित सम्बन्धीय प्रथम विचार, परिभाषा, और आदि हेतो का वर्णन

---

१ रेखागणित, गणितशास्त्र का वह भाग है जिस में, रेखा, धरातल, वा पृष्ठ, और घनपदार्थों के विशेष गुणों का निरूपण है हर एक पदार्थ के तीन प्रकार के परिमाण होते हैं यथा, लंबाई चौड़ाई और मुटाई वा गहराई, यथा एक काष्ठ के सहतीर में क ख, लंबाई

क ग, चौड़ाई और क घ, मुटाई वा गहराई है पदार्थों की सीमा, वा अवधि, पृष्ठ वा धरातल होते हैं यथा, क घ च ख, एक धरातल हैं इसी रीति से मेज का ऊपर, वा पृष्ठ, कहने से उसके दल, वा मुटाई का कुछ भान नहीं होता, तथा किसी सरोवर का जलपृष्ठ कहने से उसकी गहराई से कुछ काम नहीं, धरातल वा पृष्ठों की सीमा, वा छोर, रेखारूप

होते है, यथा, क ख, प्रान्त, वा कोर, रेखारूप है ॥ इसी रीति से मेज की कोर कहने मे उसके विस्तार का कुछ ज्ञान नही होता, जहा रेखा एक दूसरे को काटती, वा मिलती हैं, उस चिन्ह को विन्दु वा चिन्ह भी बोलते है ॥

२ दो बिन्दु के मध्य के लघुतम मार्ग वा दूरी को रेखा कहते है, क, ख, दो बिन्दु वा स्थानो की मध्य दूरी की ठीक माप, क ग ख सरल रेखा की लंबाई

है कोई मनुष्य, क, एक स्थान से ख, किसी दूसरे स्थान को सीधे से सीधे मार्ग होकर गया चाहे तो वह, क ग ख, सीधी रेखा मे चलेगा, और दाये बायें को नही फिरेगा, परतु जो वह, क च ख, वक्र, वा क घ ख, कुटिल रेखा मे होकर जावेगा, तो उसे, क ग ख, की अपेक्षा अधिक दूर चलने पडेगा, इससे यह आता है कि क घ ख त्रिभुज मे क घ, घ ख, दो भुजा मिलकर, क ख, तीसरी भुज से, बड़ी वा लंबी होती हैं ॥

३ सीधी कोर वा शलाका बनाने मे, खाती लोग, उस कोर की सीध मे अपने नेत्र को रखकर, उसके प्रत्येक भाग

को देखेंगे तो निश्चित करलेवेगे, कि यह सीधी है, परतु केवल एक ही सिरे, और मध्यभाग को देखेंगे, तो जानेगे कि यह झुकी है, वा गोल है, तथा, जो उस कोर के केवल दोनों सिरे ही दीखे, और, मध्य भाग न दीखे, तो जाना जावेगा, कि यह बीच से ख़ाली है, इसका हेतु यह है, कि सब पदार्थो से जो प्रकाश की किरणे नेत्र को आती है वे सरल रेख रूप होती हैं ॥

४ इसी हेतु से, जब कोई जरीबवाला, क से घ तक दो बिन्दुओं के बीच में भूमि पर सीधी रेखा खैचा चाहे तो वह कई एक चिन्हों पर बीच मे बांस, वा झंडे खडे करेगा, और फिर, छोरों के, क और घ झंडों की सीध में दृष्टि लगाकर, उन दोनों के योग की रेखा मे जब बीच के झंडे होवे उन्हें देख

सकेगा अथवा जो दो बासों के, यथा क, और च, के योग की रेखा को, ख तक बढ़ाया चाहे तो, ख, के पास कोई स्थान पर एक और बांस रखकर, देखेगा कि ये ख, च, क तीनों बांस कहां से एक दूसरे की एक ही रेखा में आते है, फिर वही चिन्ह, ख वर्द्धित, क च, रेखा मे होवेगा, और इसी रीति से, और भी बिन्दु, निश्चित हो सक्ते हैं, इस रीति से, कोसों तक पहाड़, और खाड़ियों मे, हो किसी देश के आ से छोर तक चाहो जैसी ठीक रेखा खेचलो, और इसी रीति से, जरीबवाले, जरीब और शेरा के द्वारा खेचो में हर एक सरल रेखा बिना झडे के भी माप सक्ते हैं ॥

५ कोई, ग, सरल रेखा एक और क ख, रेखा के साथ हटाई जावे तो, वे दोनों हरएक स्थिति मे एक दूसरे के ठीक अनुरूप रहेंगी, क्योंकि अन्यथा जहां कि वे नही

क ग ख

मिलेंगी, वहां यह सिद्धान्त न रहेगा, कि बिन्दुओ के बीच मे छोटी से छोटी दूरी, रेखा होती है ॥

६ वक्ष्यमाण प्रश्न इसलिये लिखे जाते है कि उपाध्याय लोगो को, किस प्रकार से, प्रश्नों के द्वारा, रेखागणित मे अति गूढ आशय, विद्यार्थियों के मन मे डाला चाहिये, प्राय जो कुछ इस ग्रंथ में रेखागणित का विषय है, वह इस रीति से विद्यार्थियों को समझाना चाहिये ॥

गुरु० क ख, रेखा को, क्या कहते है ? क———ख

विद्यार्थी० इसे सरल रेखा कहते है,

गु० क ख, और ग घ, दो रेखाओं मे से कौन सी बडी है ?

वि० क ख, रेखा बड़ी है, क———ख ग———घ

गु० तुम इसे ठीक २ कैसे निश्चय कर सक्ते हो ?

वि० ग घ, रेखा को, क ख, पर रखने से,

गु० क च ख, रेखा, किस प्रकार की है (२ प्रक० की आकृति मे) ?

वि० यह बक्र रेखा है, जिसे बहुधा बक्रा कहते है,

गु० ठीक है परंतु इसे टेढ़ी रेखा भी कहते है, कहो, क च ख, वक्र रेखा और क ख, सरल रेखा में कौनसी छोटी है ?

वि० क ख, सरल रेखा,

गु० तुम पृथिवीनाथ से नौमहले को गया चाहो, तो किस रेखा मे चलोगे ?

वि० सरल रेखा मे, (क्योंकि) पृथिवीनाथ और नौमहले के बीच मे लघिष्ठ दूरी सरल रेखा होवेगी,

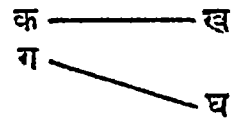
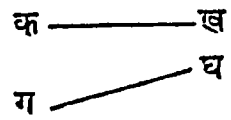
गु० क ख, और ग घ, सरल रेखाओं क———ख के विषय मे, अब तुम क्या कहोगे ? ग———घ

वि० वे समान देख पड़ती है, तथा एक दूसरे से मिलाऊ सी जानी जाती है,

गु० वा इस रीति से कहो कि, ग घ = क ख, और ग घ, = क ख, के समानान्तर भी है कहो, अब, ग घ, क ख के समानान्तर है ?

क ———— ख
ग ———— घ

वि० नहीं, क्योंकि, ग घ, क ख से दाहिं ओर मिल जायगी,

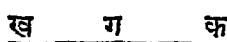
क ———— ख
ग ———— घ

गुरु० अब वे किस ओर मिलेंगी ?

वि० दाहिनी ओर,

गु० कहो, इस से समानान्तर रेखाओं का असाधारण, वा विशेष धर्म, अथवा, लक्षण, क्या पाया जाता है ?

वि० यह है, कि चाहो जहां तक उन्हे दोनों ओर बढ़ावें, वे कभी नहीं मिलेंगी ॥

७ जिस धरातल में, कोई से दो विन्दु के मध्य की रेखा सरल होवे, तो उसे सम, वा एकसा चपटा, अथवा रन्दा, कहेगे, यथा, किसी मेज पर सीधी शलाका रखने से, प्रत्येक स्थान मे, प्रत्येक विन्दु, उसे छुवे, तो उस मेज की पृष्ठ से, समपृष्ठ कहेगे, समपृष्ठ का निश्चय करने के लिये, उसकी सीध में अपना नेत्र रखकर देखो, जो एक ही काल मे पृष्ठ का हरएक विन्दु दीख पड़े तो जानो कि वह पृष्ठ सम है इस रीति से ये सब क्षेत्र समपृष्ठ पर खिचे हे ॥

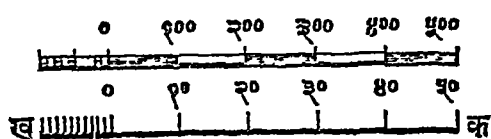
८ रेखाओं का मापना — कर्मकार, दो छड़ियों को, कि वे समान है कि नहीं यह जानने के लिये, एक को दूसरी पर, उन्हो के एक ओर के सिरे मिलाकर रखता है, अब उन्हों के दूसरे सिरे भी मिल जावेंगे तो उसे निश्चय होगा कि ये दोनों समान है, सिद्धान्तीय रेखागणित में यह रीति, एक प्रथम ही उपक्रम है यथा, क———ख, और ग———घ दो समान लंबाई की

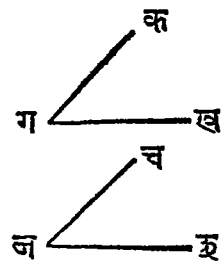
रेखा है, अब, ग घ, को क, ख पर ऐसे धरें कि एक का, घ, सिरा दूसरे के, ख, सिरे से ठीक २ मिलजावे तो पहली का, ग सिरा भी दूसरी के, क सिरे से मिलजावेगा, और, क ख, से ग घ, बड़ी होगी, तो, ग, सिरा, क, से बाहर बढ़ जावेगा, तथा, क ख, से ग घ, छोटी ही होगी तो, ग, सिरा, क, सिरे तक पहुचेगा भी नहीं, ख ग क

क ख, रेखा का मध्य, ग, होवे और, ग, से ग ख, को लौट लेवें तो, ख ग, ठीक २ क ग, रेखा से मिलजावेगी, और, ग, चिन्ह पर, क ख, रेखा के सम दो भाग होजावेंगे, क ग ख

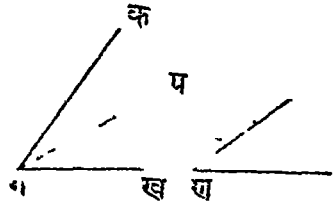
समान रेखाओं के मापने मे, बहुधा, परकार, अर्थात्, कंपास, काम आते है, यथा, क ख, रेखा मे से, ख ग, भाग, घ च, के तुल्य किया चाहें, तो घ च, रेखा को, कंपास से घ च केवल, लेकर, ख ग, पर रखने से इष्टसिद्धि होजावेगी, रेखाओं की लंबाई मापने के लिये, कोई माप की एकाई ठहरालेना आवश्यक होता है, कि जे बेर किसी रेखा पर ओर से छोर तक वह आवे, उतनी एकाई उस रेखा मे होवेंगी, यथा, माप की एकाई, इंच होवे, तो रेखा की लंबाई इंचों मे आवेगी, और माप की एकाई फुट होगी, तो वह फुटों में, आवेगी, ऐसे ही आगे मे भी जानना, विचारित रेखा मे माप की एकाई ठीक २ न आसके तो उस शेष भाग की लंबाई, उस एकाई के कोई भिन्न अंश से प्रकाशित की जावेगी, रेखाओं की लंबाई मिलाने के लिये समभाग की माप बना-ने के अर्थ, कंपासों का,

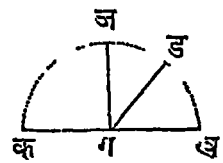
० १०० २०० ३०० ४०० ५००

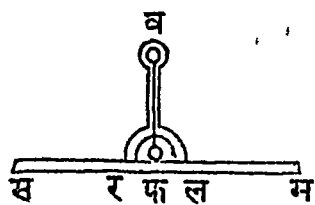
० १० २० ३० ४० ५०

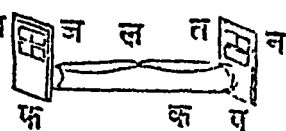
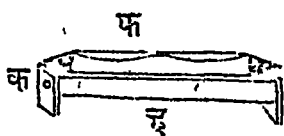
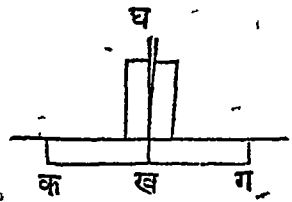
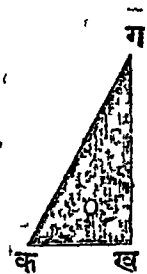
ख क

कोई सूक्ष्म अन्तर लेलो, और उसे दश वेर दुहराओ, कि जिस से ख०, एक भाग होजावे, अब ख०, के तुल्य कंपासे के अन्तर से, १०, २०, ३० आदि समभाग चिन्ह तक करलो, तो, ख०, के हरएक भाग को एकाई मानने से, ० से १० तक दूरी दश एकाई होगी, तथा,० से २० तक २० एकाई इत्यादि होगी, और, ख०, का हरएक भाग १० एकाई माना जावे तो, ख०, के तुल्य मापयंत्र के, भाग, सैकड़े होवेंगे, तथा, ख०, को ही एकाई मानें, तो हरएक, ख०, का भाग दशमांश होगा, यथा, ख०, एक फुट सूचित करे, तो, क०, ५ फुट सूचित करेगी और, ख०, का हरएक भाग एक फुट का दशमांश सूचित करेगा॥

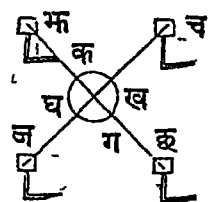
६ कोण, और उन्हों की माप.—कोण, दो रेखाओं के, जो एक दूसरे से मिलती है बीच का अन्तर होता है, यथा, क ग, और ख ग, रेखा, ग कोण वनाती है, और अब, क ग, रेखा, ख ग, पर क ग ख, वा ख ग क, कोण से झुकी कही जावेगी, वा, ख ग, रेखा पर, क ग, का झुकाव, क ग ख, वा ख ग क, कोण

कहा जावेगा, जिस मे कोण पर का अक्षर, ग, और दोनों अक्षरो के वीच मे वोला जाता है, कोण सूचित करने में बहुधा ∠ यह चिन्ह लिखते है, यथा, क ग ख कोण, इसके स्थान में, ∠ क ग ख, लिख सके है, तथा कोई भूल न पडती होवे तो केवल, ग, कोण, वा ∠ ग, ही लिखेंगे, दो कोण एक दूसरे से ठीक २ मिल जावें, तो वे समान होंगे, यथा ∠ ज, ∠ ग के तुल्य है वा नहीं, यह जानने के लिये, जो रेखा ∠ ज, वनाती है उन्हे, जो रेखा ∠ ग बनाती है, उन्हों के ऊपर इस रीति से रक्खेंगे कि, ज, बिन्दु, ग, पर होवे और ज छ,

रेखा, ग ख, रेखा को आच्छादित करे, अब, ज च, ग क को आच्छादित करेगी तो, कोण तुल्य होगे, पर, ज च, ग क, के बाहर पड़ेगी तो, ∠ ज, ∠ ग, से बडा होगा, तथा ज च, ग क के भीतर ही पड़े तो, ∠ ज, ∠ ग से छोटा होगा, यह भी शीघ्र ही निश्चित होजायगा, कि जो रेखा कोणो को बनाती है, उन्हो की लबाई से, कोणो

का आकार कुछ सम्बन्ध नही रखता, क्योंकि, कोण को बिना बदले, रेखाओ को चाहो जितना वढ़ा, वा घटालो, कोण से कुछ काम नही ∠क ग ख को पूरा करने मे, ∠ग दोबेर आवे, तो ∠ ग से ∠क ग ख, दूना होगा, तथा, ग प, रेखा ∠क ग ख, के दो समान भाग करे तो, ग प, को कोण की सम दो भागकारक रेखा कहेगे, और ∠ प ग ख, को, ग प पर लौट लेवे तो, ख ग, ठीकर, ग क, पर पडेगी ॥

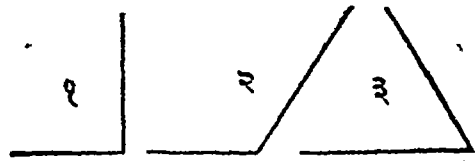
क ग्व, रेखा से मिली, ग ड, रेखा स्पष्ट है, कि बाये की अपेक्षा दाहिनी ओर को अधिक भुकी है, अर्थात् ∠ ख ग ड, से ∠ ड ग क, वड़ा है, परतु, ग ज, ऐसे खेची जावे, कि वह दो मे से, एक भी ओर को न भुकी होवे, और इसी से ∠ क ग ज = ∠ ज ग ख बनावे, तो इन कोणो से जात्य, वा

समकोण कहेगे, ग ज रेखा, क ग्व पर लव कहावेगी, तथा, ख ग ड, कोण, न्यून कहा जायगा, क्योकि वह समकोण से छोटा है, और, ड ग क कोण, अधिक कोण कहावेगा, क्योकि वह सम-कोण से वड़ा है ॥

१० दृष्टान्त और व्यावहारिक प्रयोग— रेखा, अर्थात् डोरी सावल बांधकर स्थिर, वा समभूमि-जल के ऊपर लटकाई जावे, तो वह रेखा जलपृष्ठ पर लंब होवेगी, इसी हेतु से, सावल का समस्थ नाम यंत्र (प्लमेटलेवल) बनाया जाता है,

यथा, ब फ सावल रेखा, काष्ठ पर कढ़ी सरल रेखा पर ठीक २ लंब होवे, तो सरल रेखा समस्थ होवेगी,

पत्थर, और, काष्ठ, एकसे रखने में, कर्मकार जन सदा समस्थ (स्पिरिट लेवल) से भी काम करते है, यह यंत्र, जत, एक काच की नली का होता है, जो प्राय, मद्य के सार से भरी होती है, और, फ ल प, चोखटा, वा टेकन, पर रक्खी होती है, म और न, सिरो पर दो २ संधि एक दूसरे पर लंबरूप होती है, इस यंत्र को काम मे लाने के अर्थ, कोई से एक सिरे को ऊंचा वा नीचा किया चाहिये, जिस से नलीके भीतर का वायुवा बुलबुला, ठीक २ बीच मे, ल, चिन्ह पर आजावे, अब नली, समस्थ होवेगी, और, प फ, समस्थ रेखा है, न सन्धि के केन्द्र पर नेत्र रखकर, दूसरे के केन्द्र मे होकार देखने से समस्थ रेखा को चाहो जहा तक बढ़ालो, कभी २ दृष्टि छिद्र, क, मद्य नली के नीचे किया जाता है; जैसा दूसरी आकृति मे है,

गुनिया नाम यंत्र काष्ठ की एक दूसरे पर लंबरूप से दो शलाकाओं को जोड़ने से बनता है, जब कोई कर्मकार गुनियां को सुधारा चाहता है वह, क ख डण्डी को, एक तख़ते की कोर पर रखकर गुनियां की धार के लगां, ख घ, रेखा खैंचता है, फिर यंत्र को लौटकर उसी धार के लगां, दूसरी रेखा खैंचता है, अब जो दोनों रेखा मिलजावें, तो उसे निश्चय होगा, कि यह गुनियां ठीक है, और न मिलेंगी, तो वह देखेगा कि इसे ठीक करने के लिये धार को किधर से सुधारा चाहिये ॥

क ख ग, त्रिकोणाकार काष्ठ का यंत्र जिसकी क ख, ख ग रेखा एक दूसरे पर लंब है कागज़ पर लंब रेखा खैंचने मे बड़े काम आता है इसके मध्य मे एक छिद्र भी होता है जिसके हेतु चित्रकार, इसे सुलभता से हटा सक्ते हैं ॥

स्वस्तिक वंश एक सीधा यंत्र होता है जिस से, जरीब डालनेवाले एक दूसरे पर लंबरूप रेखा, भूमि पर खैचते है वह क ख ग घ, गोल काष्ठ का बनता है जिसका व्यास प्राय छह इंच का, और जो बीच से, क ग, ख घ, एक दूसरे पर लंबरूप दो रेखाओं, मे चिरा होता है, यह काष्ठ की गोल पट्टी एक नोकदार बांस पर रक्खी जाती है, जिसके हेतु जरीव-

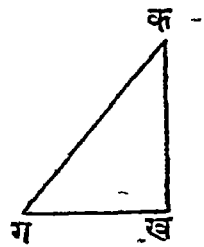
वाले, इसे भूमि मे डाल सक्ते हैं, इस यंत्र का प्रयोग जानने के अर्थ एक दृष्टान्त लेलो, यथा, च और ज दोनों चिन्हो के योग की च ज, रेखा पर, झ छ रेखा लंबरूप डालनी है,

अब प्रथम, च ज पर झण्डा रखने के अर्थ घ ख, सन्धि की सीध मे, दृष्टि को पहिले तो, ज, की ओर फिर च, की ओर, लगाकर यंच को हटाओ, जब लग कि संधि दोनों चिन्हों की सीध में न आजावे, फिर क ग संधि की सीध में दृष्टि लगाओ, और दूसरे मनुष्य से दृष्टि की रेखा में झ और, छ चिन्ह करादो तो च ज, पर, झ छ लंब होवेगी ॥

११ गुरु० यहां बने हुए कोणों के नाम लो,

१ २ ३

विद्यार्थी १ समकोण, २ अधिककोण, ३ न्यून कोण है ॥

गु० क ख ग, त्रिकोण में कितने कोण है ?

वि० उस में तीन कोण है और इसी से उसका नाम त्रिकोण है ॥

क ग ख

गु० परंतु इस विशेष आकृति के त्रिकोण से, समकोण त्रिभुज कहते हैं उसका क्या हेतु है ?

वि० क्योंकि इसका, ख, पर का एक कोण समकोण है ॥

गु० च छ ज, त्रिभुज अधिककोण त्रिभुज क्यों कहाता है ॥

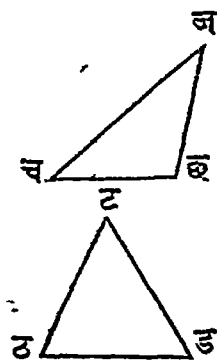
वि० क्योंकि उसका, छ पर का एक कोण अधिक कोण है ॥

ज च छ

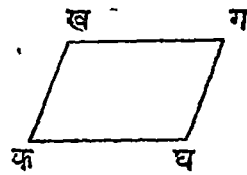
गु० ट ठ ड, त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज है, यह नाम इसका कब होसक्ता है ?

वि० जब सब कोण, न्यूनकोण होवें ॥

ट ठ ड

गु० इस पिछली आकृति में कौनसी भुजा समान जानी जाती हैं ?

वि० सब ही भुजा दूसरे के समान देख पडती है ॥

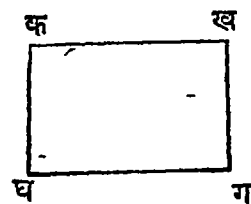
गु० ऐसा होता है तब यह त्रिभुज समत्रिबाहु कहाता है और जबकेवल दोही भुजा समान हो-ती है, तब उसे समद्विबाहु कहते हैं,

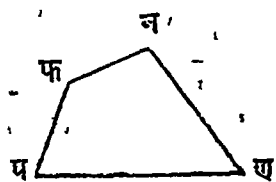
पुन गु० इस समानान्तरबाहु मे कौनसी भुजा समानान्तर खिंची है?

वि० एक दूसरे की सामने की भुजा समानान्तर है, अर्थात्, क ख, ग घ, के और ख ग, क घ के समानान्तर हैं ॥

गु० जो तुमने अभी कहा है, यही समानान्तरबाहु का लक्षण वा परिभाषा है अच्छा कहो तुम्हारी पट्टी का कैसा आकार है ?

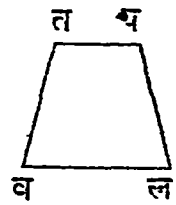
वि० इसका आकार समानान्तरबाहु है ॥

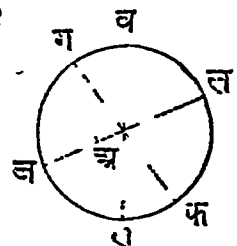
गु० ठीक है, परन्तु एक भुजा दूसरी पर लंब है, इसलिये इसे समकोण चतुर्भुज, वा आयत भी कहते है, यथा क ख ग घ, समकोण चतुर्भुज है, जिसकी सामने की भुजा समानान्तर ही केवल नही हैं किन्तु पास की भुजाओं से बने कोण भी, यथा ∠ क, समकोण है समकोण चतुर्भुज की लंबाई, चौडाई तुल्य

होवे, अर्थात्, घ ग = घ क होवे, तो उसे वर्गक्षेत्र, वा वर्ग कहेगे, इसी से समकोण समबाहु भी कहते है ॥

पुन गुरु० प फ न ण, चतुर्भुज को विषम चतुर्भुज कहते है, इसकी भुजाओं के मार्ग के विषय में तुम क्या कहोगे ?

वि० इसकी कोई भी भुजा एक दूसरे को समानान्तर नहीं है ॥

गु० इस क्षेत्र को समलंब चतुर्भुज कहते हैं इस में पहिले क्षेत्र से क्या विशेष है?

वि० वल भुजा त प के समानान्तर है॥

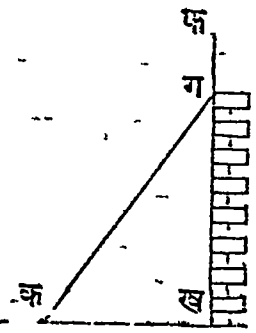
गु० (डोरे से एक वृत्त बनाकर)

यह वृत्त तुमने बनते हुए देखलिया, कहो अब अ केन्द्र की अपेक्षा वलफगजग परिधि किस प्रकार से स्थित है?

वि० परिधि का हरएक विन्दु केन्द्र से समान दूर होगा, अर्थात् अ व अ ल अ फ अ ग इत्यादि सब एक दूसरे के तुल्य होंगे॥

गु०, केन्द्र से परिधि तक खिंची अ ल रेखा त्रिज्या वा व्यासार्द्ध और केन्द्र में होकर परिधि तक, खिंची वा अ ग रेखा व्यास कहाती है अब कहो त्रिज्या की अपेक्षा व्यास की क्या लम्बाई है?

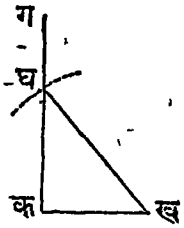
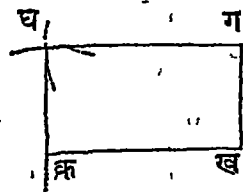
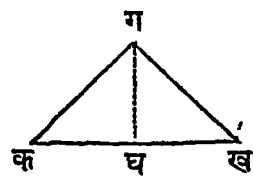
वि० त्रिज्या से व्यास दूना होता है क्योंकि ज ल, व्यास, अ ज, अ ल, दो त्रिज्याओं का बना है॥

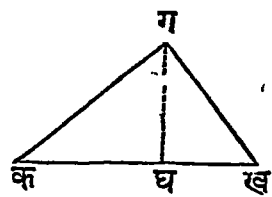
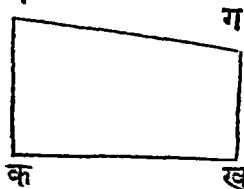
प्रश्न और उन्हीं के करने का प्रकार॥

१ ख ग, भीति की उंचाई २० फ़ुट है, कहो उस से १५ फ़ुट दूर रक्खी हुई सिड्ढी की क्या उंचाई होवेगी, जो उसकी चोटी तक पहुंचती है?

यहां ८ प्रक० से समभाग की माप पर, क ख = १५ लेकर त्रिकोणाकार गुनियां से, क ख, पर, ख फ, लम्ब डालो, और उसी समभाग की माप पर ख ग =२० लेकर क ग, को जोड़ दो,

अब इस दूरी को उसी माप से मापने से आकांक्षित सिड्डी की लम्बाई = २५ फ़ुट आवेगी ॥

२, क ख, क ग दो सड़कें एक दूसरी पर लम्ब है और क, से १५० और १८० गज़ पर क्रम से ख और घ, स्थानों पर दो घर है कहो घ, से सीधे, ख को जाने मे कितना फरक बचेगा? उत्त ८६ गज़ ॥

३, ३० फ़ुट लम्बे और २० फ़ुट चौड़े घर का डौल काढ़ दो, और क, से ग, तक खिचे कर्णपथ को लम्बाई निश्चित करो ॥

समभाग की माप से क ख,=३० लेकर चिकोणाकार गुनियां से क ख, पर, ख ग, क घ लम्ब डालो, और उसी माप से ख ग, क घ, हरएक २० के तुल्य लेलो और, ग घ, को जोड दो अब क ख ग घ आकांक्षित आकृति होवेगी और क से ग, तक कम्पास रखकर उसी माप से देखने से आकांक्षित कर्णपथ की दूरी = ४२ के लगभग आवेगी ॥

४, जरीब, और स्वस्तिक वंश से, क ख ग, एक चिकोणाकृति खेच मापने मे, क से, घ तक दूरी= ७ जरीब, और वहा से, ग घ, रेखा ग, सिरे तक खेची वह क ख पर लम्ब है, और उसकी लम्बाई=६ जरीब, तथा, घ ख=५ जरीव निश्चित हुई, अब खेच का रूप और क ग, ख ग भुजाओं की लम्बाई निश्चित करो ॥

उत्तर क ग =६·२ और ख ग=७.८ जरीब

५. क ख ग, एक बंगले की छत्त की आकृति है, जिसकी लम्बरूप उंचाई, ग घ,=८ फ़ुट और छत्त के आधार का आधा बिस्तार, क घ=८.५ फ़ुट होवे तो, ग क कड़ी कितनी लम्बी होवेगी ? — उत्तर ११.६ फ़ुट॥

६ ग, और घ, एक दूसरे से अगम्य दो स्थानों का अन्तर जानने के लिये मैंने घ क =६ गज़ मापकर उस पर लम्बरूप, क ख रेखा में चलकर, ग, स्थान के सामने से ख, चिन्ह पर एक बास रक्खा जो क ख पर ख ग, लम्ब बनाता है और फिर क ख = ९ गज़ ख ग = ४ गज़ निश्चित हुई कहो ग, घ, के वीच का क्या अंतर होगा ?

सममाप पर से क ख, = ९ लेकर उस पर क घ, ख ग, लम्ब डालकर उसी माप से क घ =६ और ख ग =४ लेलो, और घ ग, जोड़कर उसे उसी माप पर मापने से आकांक्षित दूरी=९२· फ़ुट आवेगी॥

७ मैं एक सरल रेखा में ३० गज़ चलकर बायें को उस पर लम्ब दिशा में फिरकर ९० गज़ तक चला पीछे दाहिने को उस पर लम्ब मार्ग में लौटा, और उस में ५० गज़ बढ़कर, सीधी रेखा मे पूर्वस्थान को जहां से आदि में चला था, लौट आया कहो कितनी दूर की सब सैर की ?

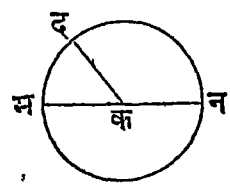
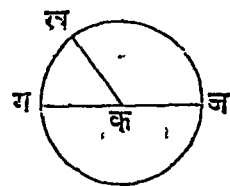
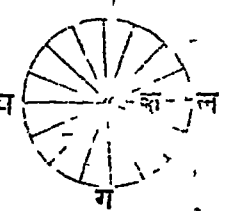
उत्तर २४० गज़॥

१२ हरएक ब्यास, बृत्त के दो समान भाग करता है क्योंकि, व ण, पर, व ग ज ण को लौट देवें तो, व ग ज ण धनुष, ठीक २ व ल फ ण धनुष को आच्छादित करलेवेगा, क्योंकि इन

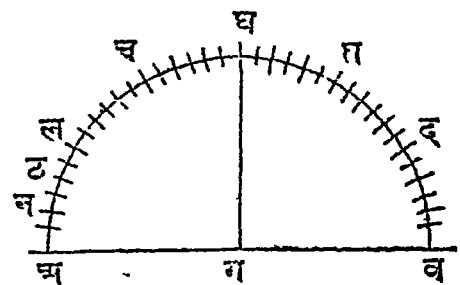
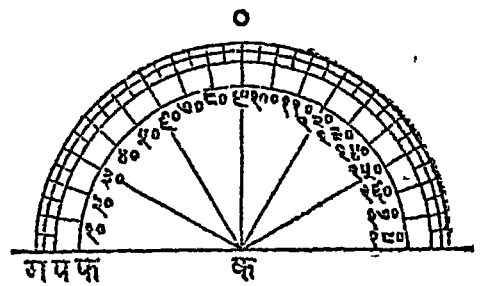
धनुषो मे हरएक बिन्दु अ, केन्द्र से तुल्य दूरी पर है, इसी से, व ग ज ग, अर्द्धवृत्त, वा वृत्तार्द्ध कहाता है ११ प्रक ० की आकृति देखेा ॥

१३ जिन्हेा का त्रिज्या समान है वे वृत्त तुल्य होगे, और तुल्य धनुष केन्द्र पर समान कोण बनावेगे,

क्योकि ख ग ज, वृत्त को, द म न, वृत्त पर ऐसे रक्खें कि एक का क केन्द्र दूसरे के क, केन्द्र पर होवे ॥

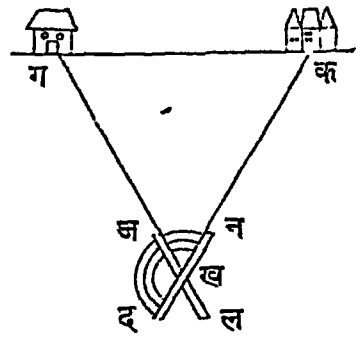
और एक का व्यास, ग ज दूसरे के म न, पर होवे, तेा क्योकि वृत्तो की त्रिज्या समान है, इसलिये परिधें एक दूसरे से ठीक २ मिल जावेगी, तथा, ख ग, द म, समान चाप भी एक रूप होजावेगी, इसी से, क ख, रेखा, क द, पर पड़ेगी और इस रीति से ∠ ख क ग = ∠ द क म, तथा, ख, ग, और, द, म, के योग की रेखा भी मिल जावेगी, यहा क ख ग सपूर्ण खण्ड को वृत्त खण्ड कहते हैं ॥

ख ल ग व, वृत्त की परिधि के कई एक समान खण्ड किये जावे तो इन खण्डो के विन्दु और वृत्त केन्द्र के योग की निकटवर्ती रेखाओं का, एक का दूसरी पर झुकाव एक ही होवेगा, क्योकि, पूर्वोक्त रीति से, इन्हेा मे से हरएक वृत्तखण्ड एक दूसरे के समान होगा, और मिलाने से एक रूप होजावेगा, इस

यह बात पाई जाती है, कि तुल्य धनुष तुल्य ही कोण घेरते

हैं, तथा तुल्यकोण भी तुल्य ही धनुष घेरेंगे ऐसा विलोम भी ठीक है ॥

वृत्त की परिधि के ३६० समान भाग लिये जावें तो इन्हीं मे से हर एक भाग अंश कहावेगा और दो पास के भाग चिन्ह और वृत्त के क केन्द्र के योग्य की रेखाओ के अन्तर्गत कोण, १ अंश, वा १° का होगा यथा, इन भागों में से ३० लेने से ∠ फ क ३०, ३० अंश, वा ३०° का कोण होगा और यह भी सहज ही जाना जाता है, कि इस रीति से बना कोण चाप के प्रथम भाग के योग की रेखा से बने कोण से ३० गुणा होवेगा, तथा क०, रेखा, म क, पर लंब है इसलिये मक० कोण समकोण होगा, और म०, चाप वृत्त पाद होवेगी, इसी से उस में ३६०°

का $\frac{1}{4}$, वा ९०° होंगे, ऐसे ही अर्द्धवृत्त में ३६०° का $\frac{1}{2}$, वा १८०° होंगे जो २ समकोण के समान है, अब एक अंश के ६० तुल्य भाग होवें, तो उन्हीं में से, हरएक भाग, कला कहावेगा, तथा एक कला के ६० समान भाग होवें तो उन्हीं में से हरएक, विकला कहावेगा, इन्हीं के लिखने का यह प्रकार है, यथा, ३९ अंश, १४ कला, २५ विकला, को ३९° १४′ २५″, ऐसे स्वरूप से लिखेंगे, जिस यंत्र का यह वर्णन किया है उसका नाम, कोणग्रह है जो बहुधा पित्तल का बनता है

और, एक दूसरे पर नियत झुकाव की रेखाओं के खेंचने में वड़े ही काम आता है, परन्तु पाठशालाओं मे सिखाने के अर्थ प्राय, छह इंछ की त्रिज्या के कागज़ के चक्र का वनाया चाहिये, अब उदाहरण के लिये, ग विन्दु से, अ ग, के साथ ६०° की चाप वनावे ऐसी एक रेखा खेंचने की वाछा करलो, और अब कोणग्रह के क, केन्द्र को ग, दिये चिन्ह पर तथा, क स, धार को ग अ रेखा पर रखकर यंत्र के ६०° के चिन्ह के नीचे लगा हुआ च, चिन्ह करके, ग च, को, जोड़ दो, तो ∠ अ ग च मे ६०° होवेंगे ॥

अ घ वृत्तपाद के तीन समान भाग किये जावें तो हर एक अ ल ल च च घ भाग ९०° का $\frac{1}{3}$ वा ३०° का होवेगा तथा अ ल के अ न, न ट, ट ल, तीन समान भाग किये जावे तो इन्ही मे से हरएक ३०° का $\frac{1}{3}$ वा १०° का होगा ऐसे ही और भी जानना ॥

१४ विद्यार्थी को पढने मे इस स्थान पर कुछ २ वह रीति भी जान लेनी गुणदायक होगी, जिस से मापकजन कोण लेते है ॥

किसी बिन्दु से दो पदार्थों

तक खिंची रेखाओं से बने कोण के मापने मे, वेधयंत्र, (थिओडोलिट) नाम यंत्र बड़े काम आता है इस यंत्र के बनाने और काम में लाने का हेतु सहज ही समझा जा सक्ता है यथा, द ज न एक वृत्त, कोणग्रहवत् अंशों मे विभक्त है जिसके ख केन्द्र पर एक नली, वा दूर दृष्टि, द न एक कील पर फिरती है, अब पहले क, पदार्थ की ओर नली को फेरो और फिर

वहां से घुमाओ जब लग वह ज ल, रेखा में आजावे जो ग दूसरे पदार्थ की सीध मे है तो क ख, और ख ग रेखाओ से बना कोण ज न, चाप के अशों की संख्या से मापा वा जाना जायगा ॥

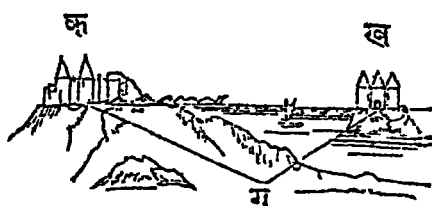
प्रश्न और उन्हों का प्रकार ॥

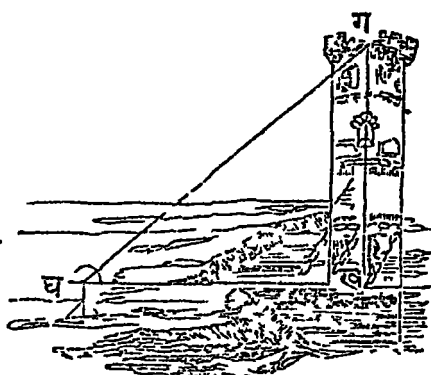
१ खस्थान से बिना मापे क, की दूरी जानने के लिये एक मापकजन ने, ∠ क ख ग = ४०° निश्चित किया और फिर ख ग दूरी = ३०० गज़ मापकर वेधयंत्र को ग पर रक्खा और ∠ ख ग क = ७०° निश्चित किया कहो वह दूरी उसने कितनी निश्चित की ?

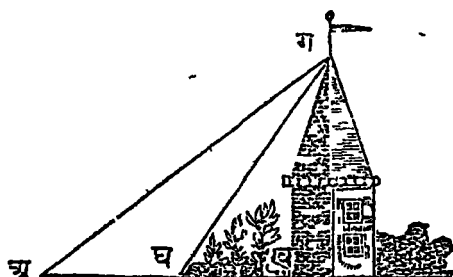
यहां ८ प्रक० से समभाग की माप की रीति से ख ग = ३०० लेकर कोणग्रह वा वक्ष्यमाण ज्यामाप से ∠ क ख ग = ४०° बनाती हुई ख क रेखा खैंचो तथा ∠ क ग ख = ७०° बनाती हुई ग क रेखा खैंचो तो ये दोनो रेखा एक क बिन्दु पर जाकर कटेंगी अब कंपास से क ख को लेकर समभाग की माप पर देखने से उस माप की इस कंपास के अन्तर्गत एकाइयों की संख्या, आकांक्षित रेखा के गज़ो की संख्या ३०० गज़ होगी ॥

२. क और ख एक दूसरे से अगम्य दो बुर्जो की दूरी लाना चाहिये यहां वेधयंत्र से, ∠ ग = ११०° लेकर ख ग = ३२ गज़ मापलो, और क पर उसी यंत्र से ∠ क = ३०° जो,

क ख

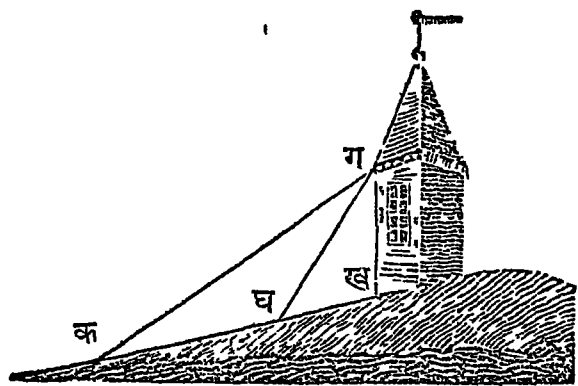
ग

ख बुर्ज ग, पर खड़े भरखे से बनता है लेलो तो क ख =४६ गज़ पूर्व रीति से आजावेगी ॥

३ ख ग बुर्ज की उचाई जानने को एक मापक ने बुर्ज की ख जड़ से घ ख समभूमि रेखा ४०० फ़ुट मापी और फिर घ पर वेधयन्त्र रखकर ग घ ख कोण = ४०° का लिया जो कि बुर्ज की चोटी ख घ समभूमि से बना बनती है कहो बुर्ज की ख ग उचाई क्या थी ?

समभाग की माप से ख घ = ४०० लेकर कोणग्रह से ∠ घ = ४०° बनाती हुई घ ग रेखा खैंचलो और गुनियां से (प्रक० १०) घ ख पर ख ग लंब डालदो तो ये रेखा ग विन्दु पर आमिलेगी अब कंपास से ख ग उचाई लेकर समभाग की माप पर देखो तो कंपास के बीच की माप की एकाइयें की सख्या बुर्ज की उचाई की फ़ुट संख्या = ३३५ फ़ुट के लग भग आवेगी ॥

४ एक ख, ग, शिखर की उचाई जानने को जिसकी ख, जड़ अगम्य है एक मापक ने अ घ, आधार रेखा = ६६ फ़ु० मापकर ∠ ग घ ख = ५२° और ∠ ग अ ख = २०° लिये कहो शिखर का, ख ग उचाई क्या थी ?

समभाग की माप से अ घ = ७६ ले लो, और कोणग्रह से ∠ घ = ५२° बनाती हुई घ ग, और ∠ अ = २७° बनाती हुई अ ग, रेखा खैंच लो; अब ग, बिंदु जहां कि ये दोनों रेखा मिलती हैं शिखर की चोटी, रूप होवेगा; इस ग, से गुनियां लेकर अ ख, पर, ख ग लम्ब डाल लो, और समभाग की माप से, ख ग को मापो तो उसके तुल्य उस माप की एकाइयों की संख्या आकांक्षित उचाई की फ़ुट संख्या = ६४ होवेगी ॥

५ क ख पहाड़ पर स्थित एक ख ग, शिखर की उचाई जानने को, एक मापक ने उसी रेखा मे, ख घ = ५० फ़ुट; और, घ क = ७५ फ़ुट, मापकर ∠ ग घ ख = ४१° और ∠ ग क ख = २४°

निश्चित किये कहो शिखर की क्या उचाई थी ?

क ख, कोई रेखा खैंचकर, समभाग की माप से, ख घ = ५० और, घ क = ७५ ले लो, तथा कोणग्रह से ∠ घ = ४१° बनाती हुई, घ ग रेखा, और ∠ क = २४° बनाती हुई, क ग, रेखा खैच लो तो ये दोनों रेखा, ग बिंदु पर जाकर मिलेंगी. अब, ख ग, को जोड़कर, उसे समभाग की माप पर मापने से, आकांक्षित उचाई = ७६ फ़ुट आवेगी ॥

संज्ञाओं की व्याख्या, और प्रक्रिया ॥

१५. रेखागणित में, जिस प्रकार से रेखागणितीय, रेखा, वा चित्र, बनाया जाता है, उसका जो विशेष रूप से विवर्ण

करे उसे परिभाषा कहते हैं यथा, समद्विबाहु त्रिभुज वह होता है जिसकी दो भुजा एक दूसरे के समान होती हैं; यह कहने से इस प्रकार के त्रिभुजो का लक्षण होजाता है आकृति वा, क्षेत्र के लक्षण से, स्वरूप बन जाता है, और वे धर्म आजाते है, जिन्हो के हेतु सिद्धान्त, वा सिद्ध करने योग्य बिशेष गुणों का उपपादन किया जाता है यथा समद्विबाहु त्रिभुज के लक्षण से, यह सिद्ध हो सक्ता है कि उसके समान भुजाओं के सन्मुख के कोण भी समान होवेंगे – क्षेत्रो मे जो विशेष गुण सिद्ध करने को होते है उन्हो से, साध्यसूत्र, और प्रमेयोपपाद्य भी कहते हैं ॥

इन परिभाषाओं की स्पष्टता मे, विशेषता और गौरव, कम पाया जाता है, पर जो विशेष गुण मान लिये जाते हैं, और जो सिद्ध करने को होते हैं, उन्हो का भेद ध्यान मे बड़ी सावधानी से रखना चाहिये इस विषय मे जहा तक काम पड़ता है उस मे कुछ यह नियम नही है, कि जिन क्षेत्रो का लक्षण कहते है, वे अवश्य बने ही होवे किन्तु लक्षण के अनुरूप उन्हो का डौल ध्यान मे आगया चाहिये, तथा यह भी अवश्य नही है, कि सिद्ध करने मे एक आकृति वा क्षेत्र दूसरे पर रक्खा ही जावे, परंतु अपने मन मे उसकी कही हुई रीति से, तथा समझलेना तो चाहिये ही, रेखागणितीय साध्य की प्रक्रिया की कारणभूत रीति उपरिस्थापन अर्थात्, एक आकृति को दूसरे पर रखने, की है यथा, १३, १६, इत्यादि प्रक० में है

साध्या का प्रतिलोम वा व्यस्त स्वरूप वह होता है, जिस में उस साध्य की भाषा व्यस्त रीति से कही जाती है इस प्रकार के साध्य बहुधा, अन्यथानुभवासिद्धि अर्थात्, और सब कल्प- के व्यर्थ करने की रीति से सिद्ध होते है. बहुतेरे,

प्रकारों में साध्य का व्यस्त स्वरूप, वस्तुत, अर्थात् हक़ीक़त मे उसी साध्य के प्रमाण में अन्तर्गत होता है जो कि हम देते हैं ॥

अशंक्य, वा स्वतः प्रकाशमान सत्य से स्वतस्सिद्ध कहते हैं अर्थात्, वह सत्य, जिसके वाचक शब्द के ज्ञानमात्र ही से, जो झट मान लिया जाता है, यथा, समानों में समान जोडने से योग भी समान होगे, समानो मे समान घटाने से शेप भी समान ही रहेगे· जो पदार्थ एक अन्य पदार्थ के तुल्य है, वे आपस में भी तुल्य होंगे इत्यादि ये स्वतस्सिद्ध सत्य के उदाहरण है· साध्यों के साधन प्रकार मे जो प्रमाण स्वतस्सिद्ध सत्य, माने जावेगे उन्हो के जानने मे विद्यार्थियों को कुछ कठिन नही होगा· यह भी मानना चाहिये, कि कोई २ साध्य ऐसे सीधे और सुबोध्य है, जैसे कि ये स्वतस्सिद्ध जिन्हों के आधीन वे साध्य माने जाते है यथा, समानान्तर रेखाओं के विशेप गुण, रेखागणित के प्रथम प्रक्रम मे इस प्रकार के साध्य, रेखागणित की रीति की तर्क से अनुमान करने के योग्य यथार्थता को, विशेप दूपित, वा उल्लंघन करने के विना भी स्वतस्सिद्धवत् माने जासक्ते हैं ॥

साध्यप्रश्न वा वस्तूपपाद्य में, दिये पदार्थ वा नियमों से, जिन्हों को प्रश्न के अनुभूत पक्ष वोलते है, कुछ करना, वा, वनाना आकाक्षित होता है परतु साध्य सूत्र और साध्य प्रश्न दोनो ही को सामान्य से साध्य कहते है, क्योंकि दोनो ही मे कुछ न कुछ सिद्ध करने को होता है ॥

मूल सूत्र मे — यह मान लिया जाता है, कि परिभापाओं मे जैसे कहा है ठीक २ वैसी ही आकृति का वनाना संभवित है, यथा, समानान्तर वाहु को यद्यपि ठीक २ नहीं वनावें

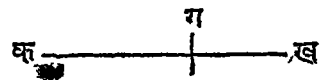
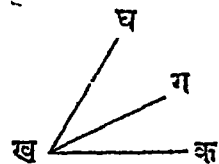
तथापि प्रकट है कि उस आकृति का परिभाषा के अनुरूप बनाना सम्भवित है ॥

एक वा अनेक साध्यो से, जो फलित होता है उसे यहां अनुमान वा फल कहते हैं ॥

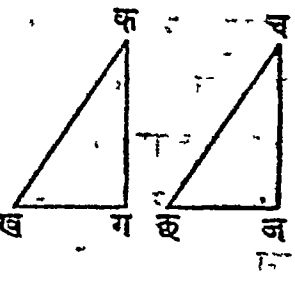
अनुभव वा पक्ष उसे कहते हैं जो किसी साध्य के उद्देश वा साधन में सत्य मान लिया जाता है ॥

समता का चिन्ह वा संकेत, = है यथा क = ख, इस से सूचित होता है कि क, ख के समान है दो, वा, अधिक राशी के जोड़ने मे + यह चिन्ह अर्थात् युक्त वा धन लिखते है, यथा, क ख = क ग + ग ख, क्योंकि यहां संपूर्ण रेखा, क ख, दो भाग, क ग और ख ग की मिलकर बनी है

तथा, एक राशि मे दूसरी को घटाने से, – चिन्ह हीन वा ऋण, लिखते है ॥

यथा, क ख – ख ग = क ग क्योंकि, क ख से ख ग निकाल डालने से, क ग, शेष रहजावेगी,

और कोणों के विषय में, ∠क ख घ= ∠क ख ग + ∠ग ख घ क्योंकि संपूर्ण कोण इन दो भागों का बना है; तथा∠क ख घ – ∠ग खघ=∠क ख ग, क्योंकि संपूर्ण कोण से एक भाग ले डालने से केवल दूसरा भाग रहजावेगा ॥

तथा ∴ यह संकेत, इसलिये, के अर्थ लिखा जाता : और जो संकेत बीज मे आते हैं उन्हों से रेखागणित उसी अर्थ का सूचित होना उचित है ॥

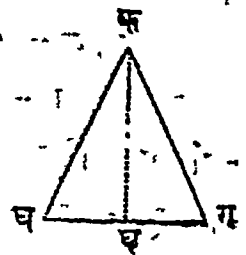
कोण त्रिकोण और समानान्तर रेखाओं के विषय के साध्यों का विषय ॥

१६ साध्य सूत्र, क ख ग, और, च छ ज, त्रिभुज सर्व्वथा तुल्य होंगे, जो; ख ग = छ ज, ख क = छ च; और ∠ ख = ∠ छ

क्योंकि, ख ग क, को छ ज च, पर ऐसे रक्खे कि, ख ग, भुज निज तुल्य; छ ज भुज पर होवे, तो क्योंकि ∠ ख = ∠ छ, इसलिये, ख क, रेखा छ च, पर पड़ेगी, परंतु ख क = छ च, इसी से, क, सिरा, च, पर पड़ेगा और इसी से, ख ग क, त्रिकोण, छ ज च, से ठीक २ मिल जावेगा ॥

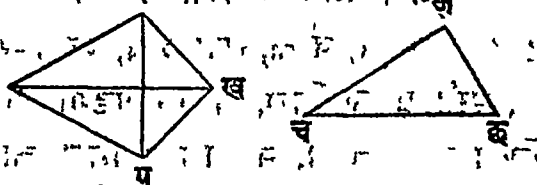
१७. साध्य — ख ग क, और छ ज च, त्रिभुज सर्व्वथा समान होंगे, जो, ख ग = छ ज, ∠ ख = ∠ छ और ∠ ग = ∠ ज ॥

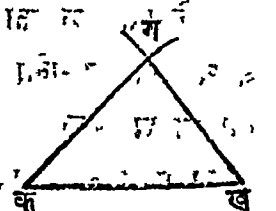
क्योंकि, ख ग क, को छ ज च, पर ऐसे रक्खो कि ख ग, भुज निज तुल्य छ ज भुज पर होवे तो क्योंकि ∠ ख = ∠ छ, इस से, ख क भुज, छ च, पर पड़ेगी; तथा ∠ ग = ∠ ज इस से, ग क, रेखा, ज च पर पडेगी, अर्थात् ख ग क त्रिभुज, छ ज च से ठीक २ मिल जावेगा ॥

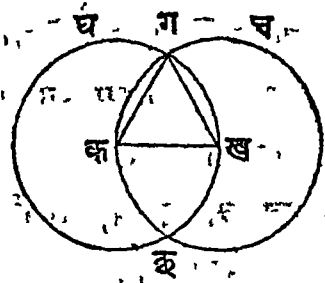
१८. साध्य — क ख ग, समद्विबाहु त्रिभुज में, जहां क ख = क ग, है तुल्य भुजों के सन्मुख के कोण समान होंगे, अर्थात्, ∠ ख = ∠ ग.

क्योंकि ∠ क को सम दो भाग कारक क घ रेखा मानलो: अब, क घ ख, त्रिभुज को, क घ, रेखा पर लौट लो; तो क्योंकि ∠ घ क ख = ∠ घ क ग इसलिये, क ख,

क ग रेखा पर पड़ेगी, तथा क ख = क ग इसी से, ख, बिन्दु ग, पर पडेगा और क घ ख त्रिभुज ठीक २ क घ ग, से मिल जावेगा; और इसी से, ∠ ख = ∠ ग. ॥

अनुमान — सिरे के क, कोण को आधार करनेवाली क घ, रेखा, आधार के भी दो समभाग करेगी; अर्थात् ख घ, = घ ग और यह ख ग, पर लंब भी होवेगी ॥

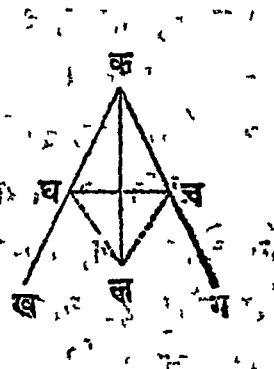
१६ साध्य — क ख ग, और च छ ज, त्रिभुज सर्व्वथा तुल्य होवेंगे, जो एक की तीनों भुजा दूसरे की तीनों भुजाओं से यथा-क्रम तुल्य होवें, अर्थात्, च छ = क ख, च ज = क ग, और छ ज = ख ग,

च छ ज, को क ख ग, के नीचे ऐसे रक्खो कि, च छ, क ख, से मिल जावे, और, ज, सिरा, प, बिन्दु पर होवे, ग, और प, बिन्दुओं को मिलादो अब क्योंकि क ग प, और ख ग प, त्रिभुज समद्विबाहु है इसलिये पूर्व्व साध्य से, ∠ क ग प = ∠ क प ग, और ∠ ख ग प = ∠ ख प ग इन तुल्य कोणों को जोड़ने से, ∠ क ग प + ∠ ख ग प = ∠ क प ग + ∠ ख प ग, वा ∠ क ग ख = ∠ क प ख. इस से १६. प्रक० से यह आता है कि, क ख ग, और, क ख प, वा च छ ज त्रिभुज सर्व्वथा समान हैं, क्योंकि ग क = प क, ख ग = ख प और ∠ क ग ख = ∠ क प ख ॥

उदाहरण — एक त्रिभुज बनाया चाहिये, जिसकी तीनों भुजा ज्ञात अर्थात्, क ख = २० क ग = २२ और ख ग = १८ होवे ॥

यहां समभाग की माप से, क ख = २७ लेकर, क, केन्द्र, और क ग = २२ त्रिज्या से एक वृत्त बनाओ, और, ख, केन्द्र पर, ख ग = १८ त्रिज्या से दूसरा वृत्त पहले को, ग, बिन्दु में काटता हुआ खैचो, फिर क, और, ग तथा, ख, और, ग, जोड़ दो तो, क ख ग आकांक्षित त्रिभुज बन जावेगा ॥

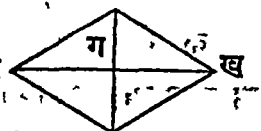
२०. साध्य – प्रश्न, वा, वस्तूपपाद्य–क ख दत्तरेखा पर क ख ग, एक समत्रिवाहु बनाना चाहिये

क, केन्द्र पर, क ख, त्रिज्या से, ख ग घ वृत्त बनाओ, तथा, ख, केन्द्र पर, उसी ख क त्रिज्या से, क ग च वृत्त भी बनाओ, जो पहले को, ग, बिन्दु पर काटे, अब, ग, को, क, और, ख, से जोड़दो तो, क ख ग, आकांक्षित समत्रिवाहु होगा ॥

क्योंकि यहां, ख ग घ वृत्त की त्रिज्या होने से, क ख = क ग, तथा, क ग च वृत्त की त्रिज्या होने से, ख ग = क ख, इसी से, क ख = ख ग; क्योंकि उन्हों मे से हरएक, क ख, के तुल्य है ॥

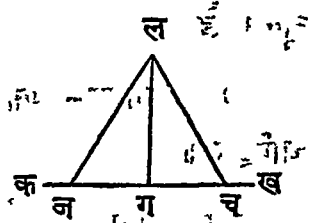
२१. साध्य–एक दिये, ∠ ख क ग, के दो समभाग किया चाहिये ॥

क ख, रेखा में कोई, घ विन्दु लेकर, क च = क घ, काट लो और, घ च जोड़कर उस पर (२० प्रक०) च ल घ, समत्रिवाहु बनालो तथा, क, ल, को भी जोड़ दो, तो इसी, क ल, रेखा से ∠ ख क ग के सम दो भाग हो जायंगे ॥

क्योंकि क ल घ, और, क ल च, त्रिभुज एकसे ही हैं; क्योंकि, क, घ = क च, और, क ल, दोनों, त्रिभुजों की रेखा एक ही है इसी से, १६ प्रक० से ये त्रिभुज सर्व्वथा तुल्य है, और ∠ घ क ल = ∠ च क ल, और, क ल घ, त्रिभुज, क ल, रेखा पर लौटाया जावे, तो वह, क च ल त्रिभुज को ठीक २ आच्छादित करे लेगा ॥

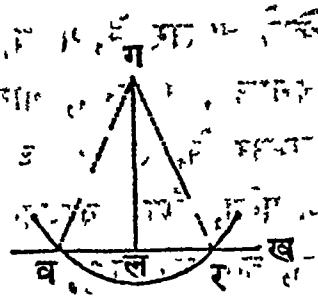
२२. साध्य—क ख, दी रेखा को, आधा २ किया चाहिये

क ख, रेखा पर, (२० प्रक०से) क ल ख, क च ख, समत्रिबाहु बनाकर, क ख, रेखा को, ग, मे काटती हुई, च ल, रेखा खैंचलो तो क ग, = ग ख, अर्थात् दी रेखा के सम दो भाग होजावेगे, ॥

क्योंकि ठीक २ पूर्व्व साध्य की क्रिया से, स्पष्ट है, कि ∠ क ल च = ∠ ख ल च • और इसी से, क ल ग, ख ल ग त्रिभुजों में, क ल = ख ल, ल ग, उभयनिष्ठ, तथा ∠ क ल ग = ∠ ख ल ग होगे; इसलिये १६ प्रक० से ये त्रिभुज तुल्य है, और क ग, = ख ग ॥

२३. साध्य —क ख, दी रेखा मे, ग, दिये बिन्दु से, ग ल, लंब खैंचना चाहिये.

कंपास के कोई, अन्तर से, ग ज = ग च, करके, च ज पर (प्रक० २०) च ल ज, सम त्रिभुज बनाओ, और, ल ग, को जोड़ दो तो, यही ल ग, रेखा आकांक्षित लंब होवेगी ॥

क्योंकि ज ल ग, च ल ग, त्रिभुजों में ग ज = ग च, ज ल = च ल, और ग ल, उभयनिष्ठ है इस से, १६. प्रक० से ये त्रिभुज सदृश है. और ∠ ल ग ज = ∠ ल ग च, अर्थात्, ल ग, क ख, लंबरूप है ॥

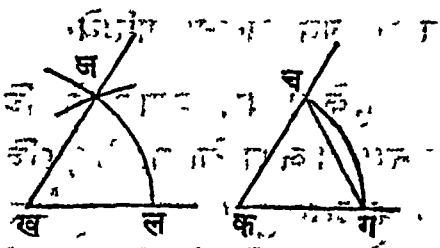
२४. साध्य—ग, दिये बिन्दु से, क ख, सरल रेखा पर, ग ल, लंब डालना चाहिये.

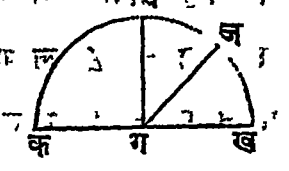
ग, केन्द्र पर, कंपास के बिशेष अन्तर, से क ख, को, व, और, र चिन्हों में काटता हुआ, एक वृत्त खेंचकर, व, और, र बिन्दुओं को ग, से जोड़ दो; और २१. प्रक० से, ∠ व ग र की सम दो भाग कारक ग ल, रेखा डाल लो, तो यही ग ल, रेखा आकांक्षित लंब होवेगी ॥

यथा, ग ल व, त्रिभुज, ग ल, रेखा पर लौट लिया जावे, तो यह ठीक २ ग र ल, त्रिभुज को ढांप लेगा, क्योंकि ∠ ल ग व = ∠ ल ग र, और ग व, = ग र, इसी से, ∠ ग ल र = ∠ ग ल व, अर्थात् ग ल, क ख, पर लंब है ॥

२५. साध्य — ल, बिन्दु से; क ख, रेखा तक खिची छोटी से छोटी रेखा, ग ल, लंब के सिवाय और कोई नहीं हो सक्ती (२२. प्रक० की आकृति देखो) ॥

यथा, ल ग को बढ़ाकर, ग च = ल ग, कर लो, क ख, में कोई, क बिन्दु लेकर उस से, ल, और, च, को जोड़ दो, तो ∠ क ग ल, ∠ क ग च, समकोण होवेंगे, और अब, क ग च, त्रिभुज क ग, पर लौटा जावे, तो वह, क ग ल, को ठीक २ ढांप लेगा, और इसी से, क च=क ल. । अब, २. प्रक० से, क ल +क च, अर्थात्, २ क ल, ल च, से अधिक है और इसलिये, ल ग, से, क ल, बड़ी है. । क ख, में हर एक बिन्दु के लिये यही प्रक्रिया होगी एक, ग, को छोड़के ॥

२९. साध्य — दिये ∠ क के तुल्य ∠ ख, बनाया चाहिये.

क, केन्द्र पर, परकार के कोई अन्तर से, ग च, चाप, बनाकर, ख, केन्द्र, और उसी अन्तर से, ल ज, चाप भी, बनालो, फिर परकार से ग च, को मापकर, ल केन्द्र पर उस अन्तर से, पहली चाप को, ज, पर काटती हुई एक और चाप खैंचकर, ख और, ज, को जोड़ दो, तो ∠ ल ख ज = ∠ ग क च.

क्योंकि, ख ल ज, और क ग च, त्रिभुज एकसे हैं; इसी से यह आता है कि ∠ ख = ∠ क ॥

३०. साध्य — एक रेखा से दूसरी के साथ बने, निकट के, ज ग क, और ज ग ख, कोण मिलकर दो समकोण के तुल्य होवेंगे ॥

ग, केन्द्र पर, किसी त्रिज्या से, क च ज ख, अर्द्ध वृत्त बना लो, अब यह स्पष्ट है कि क ग ज, और ख ग ज, कोण मिलकर, १८०° वा दूने ९०° अर्थात् दो समकोण है ॥

प्रकारान्तर — ग, विन्दु से, क ख, पर ग च, लंब डाल लो, तो ∠ च ग क + ∠ च ग ख = दो समकोण, और ∠ ज ग क = ∠ च ग क + ∠ च ग ज, इन समानों में ∠ ज ग ख, जोड़ने से ∠ ज ग क + ∠ ज ग ख = ∠ च ग क + ∠ ज ग च + ∠ ज ग ख, = ∠ च ग क + ∠ च ग ख = २ समकोण*.

---

* इस साध्य का प्रतिलोम भी ठीक है अर्थात् क ग, और रेखाओं के साथ, च ग, रेखा; क ग च, ख ग च कोणों

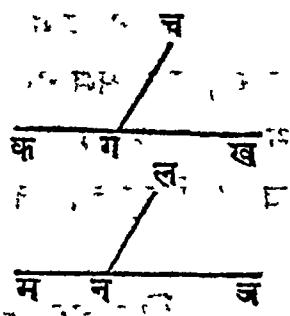
वार्त्तिक — ज ग क, कोण, ज ग ख, का पूरक कहाता है, और ∠ ज ग च उसी की कोटि कही जाती है ॥

इस साध्य के विषय के उदाहरण ॥

१. ∠ ख ग ज = ४०°, इसका पूरक ∠ ज ग क क्या होगा?
उत्त० १४०°: क्योंकि ∠ ज ग क = १८०° − ४०° = १४०°

२. ∠ ख ग ज = ३५° इसकी कोटि ज ग च, क्या होगी?
उत्त० ५५; क्योंकि ∠ ज ग च = ९०° − ३५° = ५५°

३. समकोण का, ३०° कौनसा भाग है? उत्त० $\frac{1}{3}$ अंश

का योग, दो समकोण के तुल्य बनावे, तो, क ग, और, ख ग, एक ही सरल रेखा में होंगी यथा म ज, कोई रेखा में, किसी, न विन्दु से, ∠ ज न ल = ∠ ख ग च, बनाती हुई, न ल रेखा खैंच लो, तो पूर्व्व साध्य से, ∠ म न ल + ∠ ज न ल = २ समकोण, ∴ ∠ म न ल + ∠ ज न ल = ∠ क ग च + ∠ ख ग च, परंतु ∠ ज न ल = ∠ ख ग च इसलिये, इन समानों को लेडाने से, ∠ म न ल = ∠ क ग च

अब, दूसरी आकृति को पहली पर ऐसे रक्खो कि, न, ग, पर होवे, और, ज न, ख ग, पर तो न ल, ग च, पर, पड़ेगी: क्योंकि ∠ ज न ल = ∠ ख ग च, तथा, ∠ म न ल, भी = ∠ क ग च; इस से, न म, ग क, पर पड़ेगी और इसी से, क ग ख, म न ज सरल रेखा से मिल जावेगी अर्थात्, ग क और ग ख, एक ही सरल रेखा मे होंगी ॥

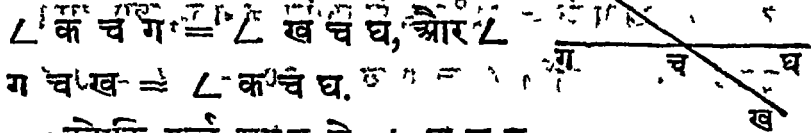
४. किसी वृत्त की परिधि के तुल्य, ६ भाग किये जावें तो हर एक उन में से के अंश का होगा ?

उत्त० ६०° क्योंकि ३६०° का ६ वां, भाग = ६०° है

५ संपूर्ण पालि का, ४०° की चाप कौनसा भाग है ?

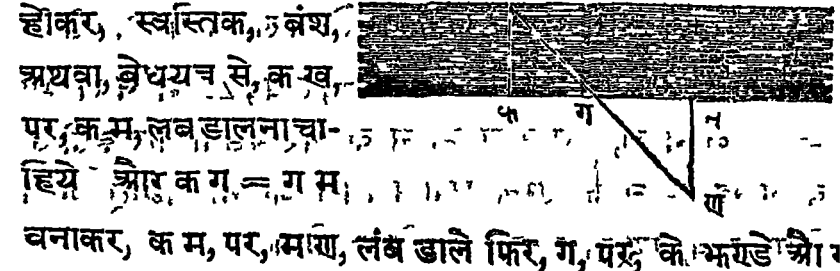
उत्त० ⅑ अंश क्योंकि ४०°, ३६०° का ठीक ⅑ अंश है.

२८. साध्य — क ख, ग घ, दो सरल रेखा आपस में कटें, तो सामने के कोण समान होंगे, अर्थात्, ∠ क च ग = ∠ ख च घ, और ∠ ग च ख = ∠ क च घ.

क, ग, च, घ, ख

क्योंकि, पूर्व्व साध्य से, ∠ क च ग + ∠ ग च ख = २ समकोण, तथा ∠ घ च ख + ∠ ग च ख भी = २ समकोण परन्तु जो पदार्थ एक ही पदार्थ के तुल्य होते हैं, वे तुल्य होते हैं.

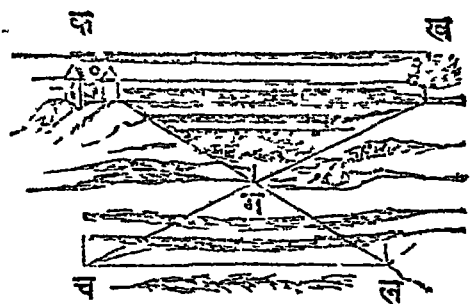
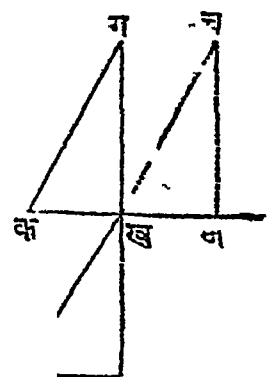
∴ ∠ क च ग + ∠ ग च ख = ∠ घ च ख + ∠ ग च ख, इन समानों में से ∠ ग च ख, ले डालने से, ∠ क च ग = ∠ घ च ख, और ईसी रीति से ∠ ग च ख = ∠ क च घ सिद्ध हो जावेगा ॥

अथ प्रयोग ॥

१ विना उतरे नदी का, क ख, फांट निश्चिन करना चाहिये मापिक को, नदी के पार के कोई, ख, पदार्थ के ठीक २ सामने क, स्थान पर खड़े होकर, स्वस्तिक, वंश, अथवा, वेधयन्त्र से, क ख, पर, क म, लंब डालना चाहिये और क ग = ग म, बनाकर, क म, पर, म ण, लंब डाले फिर, ग, पर के झण्डे औ

ख, क, ग, म, ण

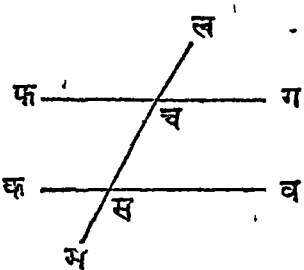
ख, पदार्थ की सीध में घ, पर एक झण्डा खड़ा करे तो, म घ, रेखा को भूमि पर माप लेनेसे, नदी की क ख दूरी आजावेगी. क्योंकि ग म घ, और ग क ख, त्रिभुजों में, क ग = ग म, ∠ म ग घ = ∠ क ग ख, (पहिले साध्य से), और ∠ क = ∠ ग. क्योंकि दोनों समकोण हैं, इसलिये, १७ प्रश्न० से ये त्रिभुज सर्व्वथा समान है और इसी से म घ = क ख ॥

२ एक दूसरे से अगम्य क, और ख, दो पदार्थों के बीच की दूरी निश्चित की चाहिये·

कोई, ग, स्थान लेकर ग ख, ग क, दूरियों को मापकर वर्द्धित, ख ग, में ग च = ख ग, और, वर्द्धित, क ग में, ग ल = क ग मापलो; अब, च ल, को मापने से, क, ख, के बीच की दूरी आजावेगी; क्योंकि ग ल च, और ग क ख, त्रिभुजों में, ग ल = ग क, ग च = ग ख और ∠ ल ग च = ∠ क ग ख; इसलिये १८ प्रश्न० से ये त्रिभुज एकसे ही है, और इसी से, च ल = क ख ॥

२८ साध्य — क ख ग, त्रिभुज का बाहरा कोण, ग ख च, सामने के भीतरे, क, वा, ग, हरएक से बड़ा है,

क्योंकि, क ख ग त्रिभुज को, क ज रेखा पर सरकावे कि क, कोण, ख, पर आजावे, तो प्रत्यक्ष है कि, ग, सिरा ख ग के दाहिनी ओर किसी च, विन्दु पर आजावेगा और इसी से ख च, रेखा, ग ख ज, कोण के बीच में पड़ेगी, अर्थात्, च ख ज वा तत्तुल्य, ग क ख से ग ख ज, कोण बडा होगा अब, ग ख भुजा को बढाने से इसी अनुमान के प्रकार से यह भी सिद्ध हो जावेगा, कि ∠ ग से भी ∠ ग ख ज, बड़ा है ॥

इस साध्य के सिद्ध होजाने से आगे का स्वतस्सिद्ध भी दृढ होजाता है

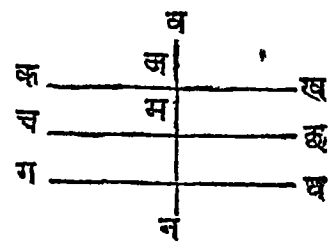
यथा स्वतस्सिद्ध— ग क ख, कोण से ∠ ग ख ज, अधिक होगा तो, क ग, और ख ग, रेखा क ज, भुजा के ऊपरी ओर किसी विन्दु पर जाकर मिल जावेगी ॥

३०• साध्य — फ ग, और क व दो रेखा, ल म एक सरल रेखा के साथ समान कोण अर्थात् ∠ फ च स, = ∠ च स व, वा एक ही बात है ∠ ल च ग = ∠ च स व बनावे तो समानान्तर होवेगी

क्योंकि ये रेखा, ल म, के दहिनी ओर तो नहीं मिलेंगी, अन्यथा उधर को त्रिभुज बन जावेगा, और इसलिये पूर्व्व साध्य से बाहरा कोण, फ च स, च स व, के तुल्य की जगह उस से बडा होजावेगा तथा इसी हेतु से, वे रेखा, ल म के बायें को भी नहीं मिल सक्ती इसी से, फ ग, क व, रेखा हैं ॥

फ च स, और, च स व, एकान्तर कोण, कहाते हैं; और, ग च ल, भीतरे, और सन्मुख, घ स व, कोण का बाहरा, वा बहिर्गत कोण कहाता है ॥

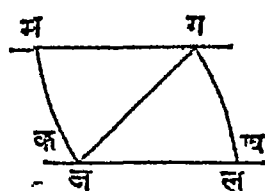
३१ साध्य—फ ग, क व, दो समानान्तर रेखाओं को ल म, रेखा काटे तो, एकान्तर कोण, फ च स, च स व, तथा बहिर्गत कोण ल च ग, और उसका सन्मुख भीतरा च स व कोण भी, समान होवेंगे (पूर्व्व की आकृति देखो) ॥

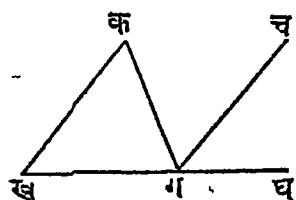
क्योंकि च स व से फ च स, कोण बड़ा होवे, तो ये रेखा, ल म की दाहिनी ओर मिलकर त्रिभुज बनावेंगी (२६ प्र॰ स्वत॰) तथा, च स व, से, फ च स, छोटा होवे, तो वे रेखा ल म, के बायें को मिलेंगी इसी से, फ ग, और क व, रेखा, किसी ओर न मिलें, इसलिये ∠फ च स = ∠च स व, तथा ∠ल च ग=∠च स व, अवश्य होने चाहियें ॥

३२ साध्य—क ख, और, ग घ, सरल रेखा, जो एक ही च छ रेखा के समानान्तर है, एक दूसरी के भी समानान्तर होवेगी ॥

यथा, व न, रेखा क ख, च छ, और ग घ, को काटती है.

पर, क ख, च छ, समानान्तर हैं इस से (प्र॰३१) ∠व ज ख =∠व म छ तथा, च छ, ग घ, भी समानान्तर है इस से, ∠व न घ, =∠व म छ, इसलिये साम्य से, ∠व ज ख =∠व न घ, इसी से, ३०. प्र॰ से क ख, ग घ, भी एक दूसरी के समानान्तर है ॥

३३. साध्य—ग, दिये बिन्दु में होकर, क ख, के समान्तर, ग म, रेखा खैंची चाहिये ॥

ग, से क ख, तक एक, ग ज रेखा, खेंचकर ग, बिन्दु मे (प्र० ८) ∠ ज ग म = ∠ ग ज ल, बनाती हुई, ग म रेखा खेंचलो तो यह ३० प्र० से, क ख के समान्तर होवेगी ॥

व्यवहार में, समान्तर रेखा, १० प्र० में कही त्रिकोणाकृति गुनियां के द्वारा बडी सहजता से खिचती है, यथा, (३० प्र० की आकृति मे) क ख रेखा से मिलाकर गुनिया की कोर, क ख, ऐसे रक्खो, कि क घ कोर, च दिये बिन्दु मे होकर जावे, फिर, स ल, रेखा खेंचकर गुनियां को हटाले जाओ, जब ल ग, उसका कोण क, च, पर आजावे, फिर, च ग रेखा यंच की, क ख, कोर से मिलाकर खैचलो तो, यह, क ख, दी रेखा के समान्तर होवेगी समान्तर रेखा खेंचने की यह रीति, समान्तर सूच, (पेरेललरूलर) की, रीति से अधिक सीधी है, तथा शुद्धता और शीघ्रता मे भी कुछ उस से कम नहीं है ॥

२४ साध्य — ख ग क, त्रिभुज का, क ग घ, बाहरा कोण, भीतरे सन्मुख, क, और, ख, कोणो के योग के तुल्य है, तथा त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण के समान होगा ॥

यथा क ख, के समान्तर ग च, खैच लो तो ३१. प्र० से ∠ च ग घ= ∠ ख, और ∠ च ग क= ∠ क;

इन तुल्यो को जोडने से, ∠ च ग घ +∠ च ग क= ∠ ख ∠ क, अर्थात् ∠ क ग घ = ∠ ख + ∠ क.

अब इन दोनों समानों में, ∠ क ग ख, जोड़ दो, तो ∠ क ग घ + ∠ क ग ख = ∠ ख + ∠ क + ∠ क ग ख; परंतु २७ प्र० से, इस, साम्य का बाया पक्ष दो समकोण के तुल्य है, ∴ ∠ ख + ∠ क + ∠ क ग ख = दो समकोण; अथवा १८०° ॥

उदाहरण और प्रयोग ॥

१ ∠ क = २५° और ∠ ख = ४२° है, ∠ क ग घ चाहिये।

यहां ∠ क ग घ = २५° + ४२° = ६७° ॥

२ ∠ क ग घ बाहरी = ९५° और ∠ क = ३६°; ∠ ख को निश्चित करो ॥

यहां ∠ ख + ∠ क = ∠ क ग ख, अर्थात्, ∠ ख + ३६° = ९५°, दोनों ओर से ३६° लेडालने से, ∠ ख = ५९°. ॥

३ ∠ ख = ४६°, और ∠ क = ८४°; शेष ∠ क ग ख, चाहिये ॥

यहां ४६° + ८४° + ∠ क ग ख = १८0°. ∴ ∠ क ग ख = ५0° ॥

४ एक त्रिभुज के आधार पर के कोण क्रम से ५५° और ७३° है सिरे का कोण चाहिये. --- --- ---उत्त. ५२°.॥

५ एक त्रिभुज के दो कोण, ७0° और ८0° हैं; शेष कोण क्या होगा ? --- --- --- = --- ---उत्त. ३0°.॥

६ एक समकोण त्रिभुज के आधार पर का कोण २७° है, कहो सिरे का कोण क्या होगा ? --- --- उत्त. ६३°. ॥

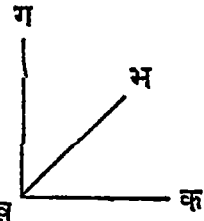
७. सिद्ध करो कि, समकोण त्रिभुज में, भुज, कोटि के सन्मुख न्यून कोण होते है. ॥

८. सिद्ध करो कि, समकोण त्रिभुज में, भुज कोटि के सन्मुख कोणों का योग ९0° होता है. ॥

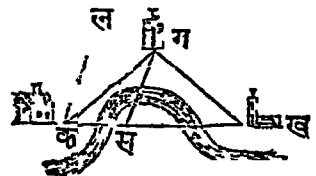
९. सिद्ध करो कि, समकोण समद्विबाहु में हरएक न्यून कोण ४५° का होता है. ॥

१०. एक समद्विबाहु के सिरे का कोण ५०° है, आधार पर के कोण क्या होंगे ? ---- ---- ---- ---- ---- उत्त. ६५°. ॥

११ ४५° का कोण बनाओ

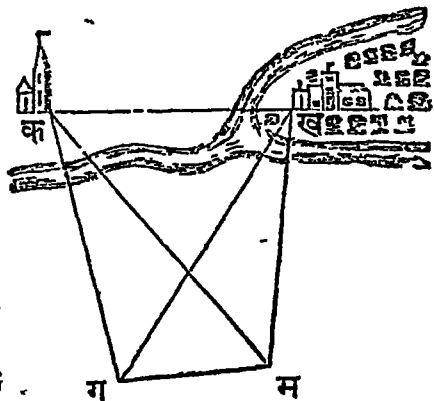
यहां, क ख, पर, ख ग, लंब डाल कर, ख भ रेखा से (प्र० २१) ∠क ख ग के सम दो भाग कर लो तो ∠क ख ग = ९०° और इसी से ∠क ख भ = ९०° का आधा = ४५° और ४५° के कोण के सम दो भाग करने से, २२ $\frac{१}{२}$° का कोण आवेगा इत्यादि ॥

१२ ६०°, ३०°, १५°, के कोण बनाने चाहिये ॥

क ख ग, एक समत्रिबाहु (२० प्र०की आकृ०) बनाओ, तो हरएक, क, ख, ग, कोण एक दूसरे के तुल्य होंगे; और इसी से ∠क= १८०° की $\frac{१}{३}$ = ६०° अब, ∠क, के सम दो भाग करने से, ३०° का कोण, और इसे आधा करने से, १५° का इत्यादि और भी आवेंगे ॥

१३ क, ख, ग, तीन पदार्थों की एक दूसरे से दूरी ज्ञात हैं; यथा, क ख= १२ मील, ख ग =७ मील, और क ग= ८ मील, अब क, और, ख, की सीध में, एक, स, स्थान से, किसी मापक ने, ख स ग कोण = ६०° पाया, ग पदार्थ की दूरी चाहिये. क ख ग, त्रिभुज बनाकर, क, से, क ल, रेखा, ∠ ख क ल

=६०° लगाती हुई खेंचलो, और, ग, से, क ल, के समान्तर म स, खेंचलो, तो ∠ ग स ख = ∠ख क ल = ६०° ॥

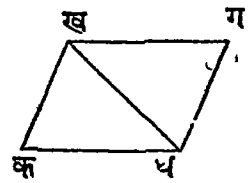
इसलिये स, वह स्थान है अब, स ग, को स्केल, अर्थात् माप, पर मापने से आकांक्षित दूरी =५.३ मील आजावेगी ॥

१४ क, और, ख, दो अगम्य पदार्थों के बीच का अन्तर जानने को, मैंने एक, ग म, आधार रेखा = १५० गज़ माप कर, म, स्थान से, ∠ ग म क = ४५° और ∠क म ख= २२ $\frac{1°}{2}$ देखे; फिर, ग, स्थान पर जाकर, ∠ख ग म= ६०°, और ∠ ख ग क =४५° देखे; कहो क और ख, पदार्थों के बीच में क्या दूरी थी ?

यहां समभाग की माप से, ग म= १५०; लेकर म, से, म क, म ख, रेखा, क्रम से ∠ग म क = ४५°, और ∠ क म ख = २२ $\frac{1°}{2}$ बनाती हुई; तथा, ग, से, ग क, ग ख, रेखा क्रम से ∠ख ग म =६०°, और, ∠ ख ग क = ४५° बनाती हुई खेंचलो, तो म ख, ग ख, रेखा, ख, स्थान पर तथा म क, ग क, क, स्थान पर जामिलेंगी; अब, क ख, को जोड़कर समभाग की माप पर मापने से आकांक्षित दूरी प्राय =१५८ गज़ आवेगी.

समान्तर वाहु तथा अन्य चतुर्भुजों के विषय के प्रमेय और उपपाद्य ॥

३५ साध्य — समान्तर वाहु की सामने की भुजा एक दूसरे के तुल्य होती है. तथा कर्ण उसे आधा २

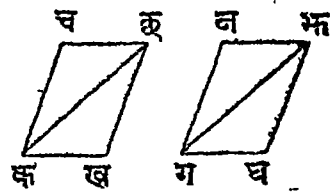
करता है, और सामने के कोण भी एक दूसरे के तुल्य होते है ॥

यथा, क ख ग घ, एक समान्तर, वाहु है, इसकी ख ग, भुज, क घ के समान्तार है, इस से ३१ प्र० से, ग ख घ, और, क घ ख, एकान्तर कोण तुल्य है, इसी रीति से, ग घ ख और, क ख घ, एकान्तर कोण भी समान है

अब, ग ख घ, और क घ ख, दो त्रिभुजो मे, ख घ भुज उभयनिष्ठ है, और ∠ ग ख घ= ∠ क घ ख, तथा ∠ ग घ ख = ∠ क ख घ इसलिये, १७ प्रक० से, ये त्रिभुज एक से हैं और इसी से, ख ग = क घ, ग घ = क ख, और ∠ग = ∠ क ॥

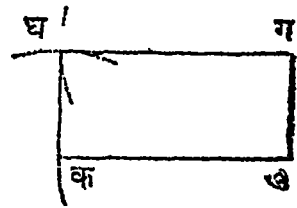
प्रतिलेाम से — ख ग = क घ, और ग घ = क ख होवे तेा, क ख ग घ, समान्तर वाहु होगा क्योंकि १६ - प्र० से ख ग घ, क ख घ, त्रिभुज एकसे होवेगे, इसी से ∠ ग ख घ = ∠ क घ ख, इसलिये ३० प्र० से, ख ग, क घ, के समान्तर है, इसी रीति से ग घ, समान्तर, क ख, के होगी अर्थात्, क ख ग घ, समान्तर वाहु है ॥

३७ साध्य — क घ, और ख ग, दो समान, समान्तर रेखा होवे, तेा एक ही एक ओर के सिरो के योग की, क ख, और ग घ, रेखा भी, समान, समान्तर होवेगी ॥

क्योंकि ग ख घ, क घ ख, त्रिभुजों मे ∠ ग ख घ = ∠ क घ ख, ख ग = क घ, तथा ख घ उभयनिष्ठ है, इसलिये १६. प्र० से वे एकसे है; इस से, क ख = ग घ इत्यादि होंगी. ॥

३७. साध्य—क ख = ग घ, ख छ = घ झ और ∠ क ख छ = ∠ ग घ झ होवें, तो क ख छ च, और ग घ झ ज, समान्तर वाहु सर्वथा एकसे होवेंगे ॥

यथा, क ख छ, ग घ झ त्रिभुज (प्र०२६) एकसे है; तथा, क च छ, ग ज झ त्रिभुज भी एकसे हैं (प्र० ३५ और १६) ॥

अब, क ख छ च, को ग घ झ ज, पर ऐसे रक्खो कि क ख, ग घ से मिल जावे, तो ख छ, घ झ पर पड़ेगी, तथा, छ विन्दु, झ, पर; और ऐसे, छ क च, त्रिभुज झ ग ज को ठीक२ ढक लेगा, अर्थात्, ये समान्तरवाहु एकसे है ॥

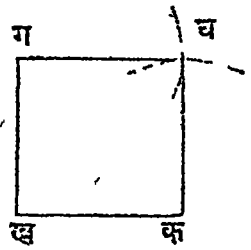
३८. साध्य — क ख ग घ, एक आयत बनाना चाहिये, जिसकी भुज, कोटि दी है; अर्थात्, क ख = ३६ और, ख ग = १८. ॥

समभाग की माप से, क ख = ३६ लेकर, उस पर, ख ग लंब डालो और उसी माप से, ख ग =१८ लेकर, ग, केन्द्र और, क ख, त्रिज्या से, घ, चाप, खैंचो, तथा, क, केन्द्र और, ख ग, त्रिज्या से एक और चाप पहलो को, घ, पर काटता हुई खैचो; और अब, क घ, ग घ, रेखा बनालो, तो, क ख ग घ, आकांक्षित आयत होवेगा.

क्योंकि, ग घ = क ख, और, क घ = ख ग, इसमे ३५. प्र० से आता है कि, क ख ग घ, समान्तरवाहु होगा. परंतु ∠ ख, समकोण है इसलिये वह जात्य आयत भी होवेगा ॥

अनुमान — आयत के सब कोण समकोण होते है ॥

३६ साध्य — क ख, एक दी रेखा पर एक वर्ग बनाना चाहिये क ख, पर, ख ग, लम्ब डाल कर, ख ग = क ख करलो, और, ग और क केन्द्रों पर क ख त्रिज्या से घ, पर एक दूसरे को काटती हुई चापें बनाकर, क घ, ग घ, रेखा खैंच लो, तो क ख ग घ, आकांक्षित वर्गक्षेत्र होगा ॥

ग घ

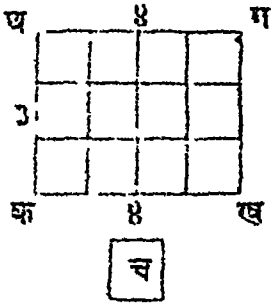
ख क

क्योंकि निर्माण से, इस आकृति की सामने की भुजा समान हैं, इस से प्र० ३५ यह समान्तर बाहु है; तथा, ख ग = क ख, और ∠ ख = समकोण, इस से यह वर्ग भी होगा ॥

अनु० वर्ग, एक चतुर्भुज क्षेत्र होता है, जिसकी सब भुजा समान, और सब कोण समकोण होते है ॥

प्रयोग ॥

१ — वर्ग की एकाई — पृष्ठ, वा धरातलो को, एक दूसरे से मिलाने के अर्थ, कोई एक पृष्ठ वा धरातल की एकाई मानना आवश्यक होती है इसके अर्थ, वर्ग बनाती हुई रेखाओं के अन्तर्गत धरातल ही सर्व सम्मत एकाई मानी जाती है, यथा पूर्व आकृति मे, क ख, भुज, एक इंछ की रेखा होवे तो, क ख ग घ, वर्गक्षेत्र मे, धरातल का एक इञ्छ, वा १ वर्ग इञ्छ होगा तथा, क ख, एक फुट लंबी होवे तो, क ख ग घ, वर्ग मे धरातल का एक फुट, वा १ वर्गफुट होगा; इत्यादि ॥

इसी से, विद्यार्थी इस बात को कभी नही चूकेगा, क्योंकि लंबाई की एकाई से, पृष्ठ वा धरातल की एकाई स्वभाव ही भिन्न होती है ॥

७ क ख ग घ, एक आत्म चतुर्बाहु में, धरातल की एकाई निश्चित की, चाहिये

यथा, क ख = ४ इञ्च, और क घ = ३ इञ्च हैं, यहा, क ख, और, क घ, रेखाओं के, भाग चिन्हो मे होकर समान्तर रेखा खैचने से, प्रत्यक्ष है कि इस आयत के, वर्ग इंचरूप भाग होजायंगे; और प्रकट है, कि हरएक आड़ी पंक्ति मे वर्गइंचों की संख्या, क ख, की रेखात्मक एकाइयों की संख्या के तुल्य होवेगी तथा इन पंक्तों की संख्या, क घ, भुज की रेखात्मक एकाइयों की सख्या के तुल्य होगी इसलिये, संपूर्ण आयत की वर्गात्मक एकाइयो की संख्या, क घ, की एकाइयों से गुणित, क ख, की एकाइयों के तुल्य होगी, अर्थात्, क ख ग घ, समाक्ष मे धरातलात्मक एकाई = क ख × क घ ॥

हरएक क्षेत्र की इन इकाइयों को, उसका क्षेत्रफल कहते हैं ॥

यथा, इसी उदाहरण मे क्षेत्रफल = ४ × ३ = १२ वर्ग इंच.

इसी से, क ख ग घ, आयत का वर्णात्मक स्वरूप, क ख, क घ, लिखा जायंगा, तथा, क ख ग घ, वर्ग का (प्र० ३९.) क ख, ख ग, वा क ख^2 इसी से समाक्ष चतुर्भुजो के क्षेत्रफल लाने के लिये यह सूत्र सिद्ध हुआ ॥

सूत्र – चोड़ाई से लंबाई को गुण दो, जो फल आवे वही समकोण चतुर्भुज का क्षेत्रफल होगा ॥

उदाहरण ॥

(१) जिस समास की लंबाई = ६ फु० और चौड़ाई = ७ फु० उसका क्षेत्रफल क्या होगा ? उत्त. यहां क्षे० फ० = ६ × ७ = ४२ व० फु०

(२) एक वर्गक्षेत्र की भुज ६ इंछ है, उसका क्षेत्रफल क्या होगा ? --- --- --- --- --- --- उत्त ३६ वर्गइंछ ॥

(३) सिद्ध करो, कि एक वर्गगज़ मे ६ वर्गफ़ुट होवेंगे ॥

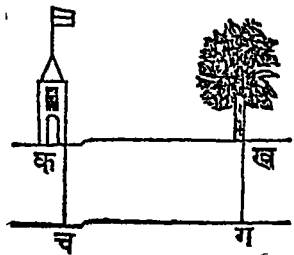
(४) सिद्ध करो, कि एक वर्गफुट में १४४ वर्गइंछ होवेंगे ॥

(५) सिद्ध करो, कि आधी रेखा पर बने वर्ग से, संपूर्ण रेखा पर बना वर्ग चौगुना होगा ॥

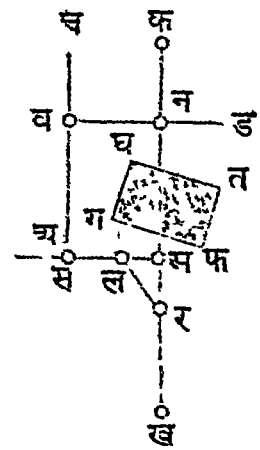
(६) सिद्ध करो, कि १ फ़ुट लंबे, १ इंछ चौड़े समास का फल, एक वर्गफ़ुट का बारहवां अंश होगा ॥

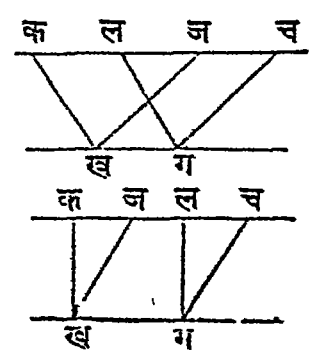
अधिक उदाहरणों के अर्थ, क्षेत्र व्यवहार के प्रश्न करने चाहियें ॥

३ क, ख, एक दूसरे से, अगम्य दो पदार्थों के बीच की दूरी को स्वस्तिक वंश से मापने की रीति ॥

कोई, ख ग = क च, दूरी लेकर भूमि पर, क ख, के समान्तर च ग सरल रेखा करलो, और स्वस्तिक वंश से, प्र० १० जहां, ग च के साथ, क च, समकोण बनाती हो, वह, च, बिन्दु निश्चित करो, और इसी रीति से ग, बिन्दु भी अब, ग च, को मापने से आकांक्षित, क ख, दूरी आजावेगी ॥

क्योंकि, क ख ग च, समान्तर बाहु है, और इसी से, क ग च, सन्मुख-भुज तुल्य होगी ॥

४ खम, सरल रेखा को, ग घ त फ, एक आड़ को पार भी बनी रखने का प्रकार ॥

यथा, म, बिन्दु से, (स्वस्तिक वंश, वा ४८ प्र० में उक्त रीति से) म अ, लंब डालकर, म स = १ जरीब, वा और कोई योग्य दूरी लेलो, और उस पर, अ च लंब डालकर, आड़ से, बढ़ कर किसी, व, बिन्दु से, म च, पर, व ङ लंब डालो, और, व न = स म, मापकर, न बिन्दु से, न व, पर, न क, लंब डालो, तो न क, ख म, सरल रेखा का भाग होगा और, स व, के मापने से, म और, न, के बीच की दूरी आजावेगी

क्योंकि, म स व न, साक्षात् समास, है, इसी से, म न= स व, तथा, व न क, व न म और, स म न, स म ख, सब समकोण है, इस से, न क, ख म, एक ही, म न रेखा मे होंगे ?

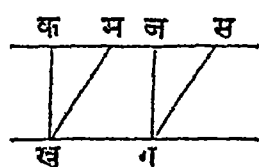
४०. साध्य—ख ग, क च, एक ही, समान्तर रेखाओं के बीच में, और, एक ही, ख ग, आधार पर के, ख ग ल क, और, ख ग च ज, समान्तर बाहु, समान होवेंगे ॥

३७. प्र० से, क ल=ख ग, तथा च ज भी=ख ग: ∴क ल=च ज, क्योंकि वे दोनों एक ही, ख ग के तुल्य हैं अब, क च, से क ल ले डालने से, च ल, और उसी से, च ज, ले डालने से, क ज, शेष रह जावेंगे इस से,

च ल = क ज, क्योंकि यहां एक ही रेखा से तुल्य रेखा ले डाली गई है अब, ल ग च, क ख ज, त्रिभुजों मे, ल ग = क ख, ग च = ख ज, और च ल = क ज, इसी से, १६ प्र०से, ये त्रिभुज एकसे है. अब सम्पूर्ण ख ग च क, आकृति से, पहले, ल ग च, त्रिभुज ले डालने से, ख ग ल क, समान्तर वाहु शेष रहेगा; और फिर, उसी, ख ग च क आकृति से, क ख ज, त्रिभुज ले डालने से, ख ग च ज समान्तर वाहु शेष रहेगा

. ख ग ल क समान्तर वाहु = ख ग च ज समान्तर वाहु क्योंकि यहां एक ही क्षेत्र से समान क्षेत्र क्रम से ले डाले गये है ॥

इस साध्य का प्रयोग ॥

ख ग स म, समान्तर वाहु का, ख ग ज क, आयत मे परिवर्तन करलेना, यथा, ख ग स म, समान्तर वाहु मे, ग स ज, त्रिभुज काट कर, ख क म, पर रख दो, अब, ख ग स म का, ख ग ज क, आयत होगया ॥

क म ज स
ख ग

इस साध्य से यह आता है, कि समान्तर वाहु का क्षेत्रफल, तुल्य आधार और उच्च के, आयत के क्षेत्रफल के समान होता है, इसी से, समान्तर वाहुओं के क्षेत्रफल लाने को यह सूत्र सिद्ध होता है ॥

सूत्र — आधार की रेखात्मक एकाइयों को लंब की रेखात्मक एकाइयों से गुणने से, जो फल आवेगा वह समान्तर वाहु के क्षेत्रफल की वर्गात्मक एकाइयों के तुल्य होगा ॥

उदाहरण ॥

१. ख ग स म, समान्तर बाहु का, जिसका, ख ग, आधार=१२ फुट, और, ग ज लंब=९ फुट है कहो क्षेत्रफल क्या होगा ?

यहां क्षेत्रफल=१२×९ = १०८ व० फुट ॥

२. उस समान्तर बाहु का क्षेत्रफल क्या होगा जिसका आधार=५६ फुट और लंब ३२ फुट ? — उत्त० १७९२ व० फुट ॥

३ वर्गक्षेत्र की क्या भुज होगी, जिसका क्षेत्रफल, १६ गज लम्बे, ९ गज चौड़े समान्तर बाहु के क्षेत्रफल के समान होवे ?

यहां य = भुज की फुट संख्या रखलो, ∴ य × य, वा, य²=वर्गक्षेत्र की व०फु० संख्या तथा १६×९=१४४= समान्तर बाहु की व० फुट संख्या ∴ प्रश्न से, य²=१४४ ∴ य=१२ फुट ॥

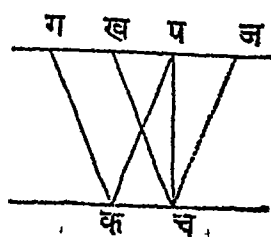
४ २७ फुट लम्बे, आयत की क्या चौडाई होगी, जिसका क्षेत्रफल १ उदा० के समान्तर बाहु के समान होवे ?

उत्तर ४ फुट

५ एक समान्तर बाहु का, क्षेत्रफल २०४ व० फुट और आधार १७ फुट है उसका लंब क्या होगा ? उत्त १२ फुट

४१ साध्य—क च ख ग, समान्तर बाहु, और क च प, त्रिभुज, क च, ग ज, एक ही समान्तर रेखाओं के बीच में और एक ही, क च, आधार पर होवे, तो त्रिभुज, समान्तर बाहु का आधा होगा ॥

ग ख प ज

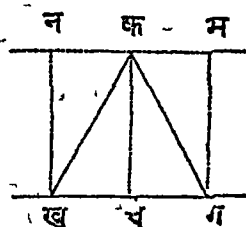
क च

यथा, क प, के समान्तर च ज, खेंचलो, तो ३५ प्र० से, क च प, त्रिभुज = आधा क च ज प,

समान्तर वाहु, परन्तु क च ज प, समान्तर वाहु=क च ख ग, समान्तर वाहु, इसलिये, क च प, त्रिभुज भी= आधा, क च ख ग समान्तर वाहु ॥

अनु० एक ही समान्तरों के बीच में एक ही आधार के त्रिभुज समान होते हैं ॥

इस साध्य का प्रयोग ॥

१. सिद्ध किया चाहिये, कि ख ग म न आयत में, ख ग क, त्रिभुज से दूना क्षेत्रफल है ॥

यथा, ख ग, आधार पर क च, लंब मान लो अब, आयत से, क ग म काट लिया जावे तो, यह ठीक २, क च ग, भाग से युक्त हो सकेगा, और इसी रीति से, क ख न, भी ठीक २ क च ख से युक्त हो सकेगा, इसी से स्पष्ट है, कि त्रिभुज से आयत दूना है ॥

इस साध्य से यह आता है, कि त्रिभुज का फल, तुल्य आधार और औच्च्य के, आयत के फल से आधा होता है, इसी से त्रिभुज के क्षेत्रफल के अर्थ यह सूत्र सिद्ध हुआ ॥

सूत्र — आधार की रेखात्मक इकाइयों को, लंब की रेखात्मक इकाइयों से गुण दो, तो त्रिभुज के फल की वर्गात्मक इकाइयां इस घात के आधे के तुल्य होवेंगी ॥

उदाहरण ॥

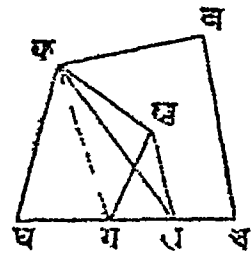
(१) क ख ग, त्रिभुज का, ख ग, आधार=७फु० और क च, लंब = ८ फु० क्षेत्रफल कहो ॥

यहां, ख ग म न, आयत का क्षेत्रफल = ७×८, परंतु क ख ग, त्रिभुज मे इसका आधा क्षेत्र है; ∴ क ख ग, त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{७\times८}{२} =$ २८ वर्गफुट, ॥

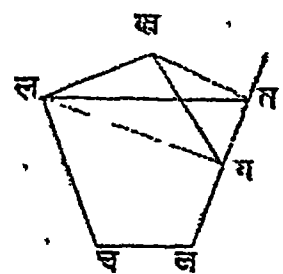
(२) एक त्रिभुज का आधार, २५ इंछ, और लंब ४२ इंछ है फल क्या होगा ? — — — — उत्तर ५२५ वर्गइंछ ॥

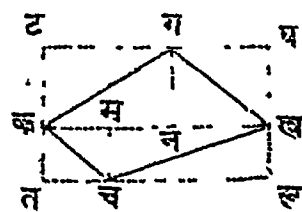
२. क ख ग घ, और, क ख ग च ज, दो क्षेत्रों का आकार बिना बदले, उन्हीं के बीच की क ख ग, टेढी मेड़ को सीधी कर लेना

यथा क ग, को जोड़कर उसके समान्तर, ख ल, खेंचलो, और क ल, को जोड़ दो, तो यहां आकांक्षित मेड़ की सीध होगी,

क्योंकि क ल ग, क ख ग, त्रिभुज समान हैं (४१. प्र० अनु०) इसी से क ल घ, क्षेत्र = क ख ग घ क्षेत्र.

३. एक लोहे की सड़क के कटाव का, च ल ख ग ज आकार है.

अब, इसे, च ल त ज, तुल्य क्षेत्र में लेजाना चाहिये ॥

यहां सब क्रिया पूर्व प्रश्न के सदृश ही है ॥

४२. साध्य—क च ख ग, विषम चतुर्भुज, त ट प ठ, बहिर्गत आयत का आधा होगा, जिसकी, त ल, भुज, क ख, कर्ण के समान्तर है

यथा ४१ प्र० से, क ख ग, त्रिभुज = आधा, क ट प ख, आयत, तथा, क च ख, त्रिभुज = आधा,

क त ल ख आयत, इसलिये, इन दोनों समानों को जोड़ देने से, क च ख ग, विषम चतुर्भुज = आधा त ल प ट आयत ॥

इस साध्य का प्रयोग ॥

इस साध्य से विषम चतुर्भुजों के क्षेत्रफल लाने का यह सूत्र सिद्ध होता है. ॥

सूत्र — कर्ण को उस पर पड़े लंबों के योग से गुणा दो, और उसका आधा, विषम चतुर्भुज का फल होगा. ॥

क्योंकि, त ट = च म + ग न, इसी से पूर्व साध्य में, क च ख ग का क्षेत्रफल $= \frac{\text{त ल} \times \text{त ट}}{२} = \frac{\text{क ख} (\text{च म} + \text{ग न})}{२}$

उदाहरण ॥

१ एक विषम चतुर्भुज का कर्ण, क ख = २६, फ़ु० ग म, लब = ८ फ़ु०, और च म = ६ क्षेत्रफल कहो ॥

यहां लंबों का योग, वा, त ट = ८ + ६ = १४ फ़ुट, ॥

∴ वहिर्गत आयत, त ल प ट का क्षेत्रफल = २६ × १४,

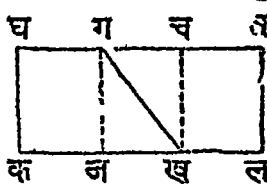
परन्तु, क च ख ग विषम चतुर्भुज का क्षेत्रफल, इस आयत का आधा है, ∴ क च ख ग का क्षे० फ़० $= \frac{२६ \times १४}{२} =$ १८२ व० फ़ु०, अथवा प्रकारान्तर से

यथा, क ख ग, त्रिभुज, का क्षे० फ़० $= \frac{२६ \times ८}{२} =$ १०४ व० फ़ु०, तथा, क च ख, का $= \frac{२६ \times ६}{२} =$ ७८ व० फ़ु०,

∴ क च ख ग क्षेत्र = १०४ + ७८ = १८२ वर्गफ़ुट

२. एक विषम चतुर्भुज का कर्ण = १८ गज़ और उस पर लंब, ५ और ४ है, क्षेत्रफल क्या होगा? — उ० ८१ वर्ग गज़.

४३ साध्य — क ख ग घ, समलंब, जिसकी क ख, घ, दो भुजा समान्तर हैं, क ल त घ, समान्तर बाहु के

जिसका, क ल, आधार, क ख, ग घ, दोनों समान्तर भुजों का योग है, और तुल्य लंब है, आधे के समान होगा.

यथा, क घ, वा त ल, के समान्तर, ग ज, और ख च, खैंचलो, तो ख ग च, त्रिभुज, ग ज ख, त्रिभुज के तुल्य होगा, तथा, ख ल = ग घ; इस से, ख ल त च समान्तर बाहु क ज ग घ, समान्तरबाहु के तुल्य होगा, इसलिये, ग त ल ख, समलंब, क ख ग घ समलंब के तुल्य होगा.

क्योंकि एक के भाग ठीक २ दूसरे के भागों के तुल्य है, इस से, आता है कि, क ख ग घ, समलंब, क ल त घ, समान्तरबाहु का आधा है ॥

इस साध्य का प्रयोग ॥

इस साध्य से समलंब चतुर्भुजों के क्षेत्रफल लाने के लिये यह सूत्र सिद्ध होता है ॥

सूत्र, — दोनो समान्तर भुजों के योग को उन्हीं के अन्तर्गत लंब से गुण दो, अब इस घात का, आधा, समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल होवेगा ॥

उदाहरण ॥

१ — क ख ग घ, समलंब का क्षेत्रफल क्या होगा, जब, क ख = ६ फु०; ग घ = ४ फु० और ग ज लंब = ५ फ़ुट है ?

यहां समान्तर भुजो का योग, क ल = ६ + ४ = १०

∴ क ल त घ, आयत का फल = १० × ५ परन्तु क ख ग घ, समलंब का फल इस आयत का आधा है. ॥

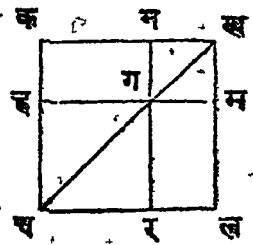
$\therefore$ क ख ग घ क्षेत्र = $\frac{१०\times५}{२}$ = २५ वर्गफुट

७ एक समलंब की समान्तर भुज, क्रम से, ६, और १० फुट हैं तथा उन्हो के अन्तर्गत लंब, ८ फुट है कहो उसका क्षेत्रफल क्या होगा ? — — उत्त० ६४ वर्गफुट ॥

४४ साध्य — च ल सपूर्ण रेखा का वर्ग च र, र ल दोनों खण्डों के वर्ग और उन्हों के दूने घात के मिलकर तुल्य होता है

अर्थात् च ल^{२} = च र^{२} + र ल^{२} + २ च र र ल

यथा, च ल, पर, च ल ख क, वर्ग, और, च र, पर, च र ग ह, वर्ग, हैं अब, ह ग, को, म तक और, र ग, को, न, तक बढ़ाने से, ख न ग म, भाग, ख न, पर, वा, र ल, पर वर्ग होगा और, क न ग ह, आयत, र ल म ग, आयत के तुल्य होगा (प्र० ३०) परंतु यह

आयत र ल, और, ल म, वा र ल, और च र का घात है; और संपूर्ण वर्ग च ल ख क, दो, च र ग ह, और, ख न ग म, वर्ग तथा, क न ग ह और, र ल म ग, दो आयतो से मिलकर बना है

$\therefore$ च ल^{२} = च र^{२} + र ल^{२} + २ च र. र ल.

यह साध्य बीज से भी शीघ्र सिद्ध होजाता है.

यथा च र = क, र ल = ख, रखलो, तो (क + ख)^{२} = क^{२} + ख^{२} + २ क ख ॥

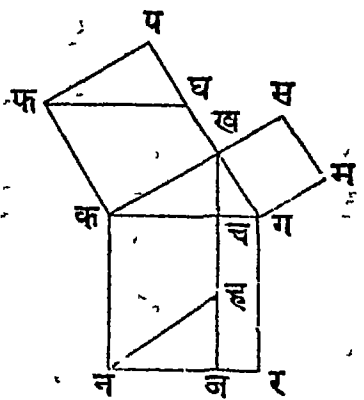
अर्थात् (च र + र ल)^{२} वा, च ल^{२} = च र^{२} + ल^{२} + २ च र. र ल — — — — — — (१)

और इसी रीति से, च ल = क, रखने से, $(क - ख)^2 = क^2 + ख^2 - २ क ख$. अर्थात्, $(च ल - र ल)^2$ वा $च र^2 = च ल^2 + र ल^2 - २ च ल र ल$. ... (२)

अर्थात् दो रेखाओं के अन्तर पर बना वर्ग, उन रेखाओं के दूने घात से हीन उन्हों के वर्गयोग के तुल्य होता है. तथा, $क^2 - ख^2 = (क + ख)(क - ख)$ --- --- (३)

अर्थात् हरएक दो रेखाओं का वर्गान्तर उन्हों के योग और अन्तर के घात के तुल्य होता है॥

रेखा गणित का सैंतालीसवां क्षेत्र और उसके आधीन समकोण क्षेत्रों के कुछ विशेष गुणों का वर्णन॥

४५. सा० प्र० क ख ग समकोण त्रिभुज के क ग, आधार पर बना वर्ग, और दो भुजों पर बने वर्गों के योग के तुल्य होता है अर्थात् $क ग^2 = क ख^2 + ख ग^2$

यथा, क ग आधार पर, क न र ग, वर्ग बनाओ और ग ख, को बढाकर, ख प = ख क, करके, प फ, फ क, क्रम से, क ख, ख प, के समान्तर खैंचलो, अब, क्योंकि ∠क ख ग, समकोण है इसलिये ∠क ख प, भी समकोण होगा इसी से, क ख प फ, वर्गक्षेत्र है. इसी रीति से, ख ग म स, वर्ग भी बना लो, और, क न, क ग, क ख, के समान्तर क्रम से, ख च, फ घ, न ह, रेखा करलो, अब, ∠ ग क न = ∠ ख क फ. क्योंकि समकोण है, इन तुल्यों मे, ∠ग क ख, जोडने से, ∠ ग क न + ∠ ग क ख = ∠ ख क फ + ∠ ग क ख, ∴ ∠ख क न = ∠ ग क फ. अब,

क ख ह न, और क फ घ ग, समान्तर वाहों मे क न, = क ग, क ख = क फ, और उन्हो के बीच के कोण भी तुल्य है, अर्थात् $\angle$ ख क न = $\angle$ ग क फ, इसलिये ३१ प्र० से, ये समान्तर वाहु एकसे है परन्तु ४० प्र० से, क ख प फ, वर्ग = क फ घ ग, समान्तर वाहु, और, क न ज च, आयत = क ख ह न, समान्तर वाहु परंतु जो पदार्थ एक ही पदार्थ के तुल्य होते है वे तुल्य होते हैं ∴ क ख प फ, वर्ग = क च ज न, आयत. ठीक २ इसी रीति से, ख ग स म, वर्ग भी, ग च ज र आयत के तुल्य है, इसलिये, दोनो क ख प फ, और, ख ग म स, वर्गो का योग, क च ज न, और, ग च ज र, आयतो के योग, वा क न र ग, वर्ग के तुल्य है·

अनु० १ — क ग, कर्ण प्रत्येक, क ख, ख ग, से बडा है क्योंकि, क ख^2 से क ग,^{2} बड़ा है इसलिये, क ग, भी, क ख, से बडा होगा·

अनु० २ क ख^2 + ख ग^2 = क ग^2. इस समी० के दोनों ओर से, ख ग^2 लेडालने से, क ख^2 = क ग^2 — ख ग^2

उक्त साध्य के प्रयोग और उदाहरण ॥

१ — एक समकोण त्रिभुज की दो भुज क्रम से ८ और ६ फु० हैं कर्ण चाहिये ॥

य = कर्ण रखलो, तो, य^2= ८^2+ ६^2 = १००, दोनों ओर का वर्गमूल लेने से, य = १० ;

२ एक समकोण त्रिभुज की १६ और १२ फु० क्रम से भुज है, कर्ण कहो, — — — — , उत्त० २० फु०

३ जब, कर्ण २५ और एक भुज १५ है तो दूसरी भुज क्या होवेगी ?

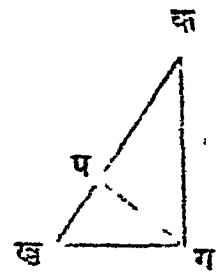
य = दूसरी भुज रखलो, तो $य^2 + १५^2 = २५^2$ दोनों पक्षों से १५^2 लेडालने से $य^2 = २५^2 - १५^2 = ४००$ दोनों ओर का मूल लेने से, य = $\sqrt{४००}$ = २०.

४. कर्ण ३० और एक भुज २४ होवे तो अन्य भुज क्या होगी? — — — — — — — — — उत्त० १८.

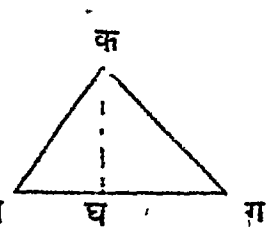
४६. साध्य—समकोण त्रिभुज की, ख ग, क ग भुज कोटि दी हैं, कर्ण पर का ग प, लंब लाना चाहिये॥

उदा० १. ख ग = २१ और, क ग = २८ रखलो, तो, $क ख^2 = २१^2 + २८^2$ ∴ क ख = ३५

अब, क ख ग, त्रिभुज का क्षेत्रफल दो प्रकार से आसक्ता है

यथा, क ख ग क्षेत्र = $\frac{२१ \times २८}{२}$, तथा क ख ग = $\frac{३५ \times ग प}{२}$ परंतु एक ही वस्तु के तुल्य पदार्थ आपस में समान होते हैं

∴ $\frac{३५ \times ग प}{२} = \frac{२१ \times २८}{२}$, इस समी० से ग प = १६.८ आता है॥

२. ग प चाहिये, जब, ख ग = २४, क ग = ३२. दी है — — — — — — — — — उ० १९.२

४७. सा० — क ख ग, त्रिभुज की तीनो भुजा दी हैं और, आबाधा, ख घ, लंब, क घ, तथा क्षेत्रफल, लाना चाहिये॥

उदा० १ — ख ग = २०, क ख = १०, तथा, क ग = १२ रखलो, और, य = ख घ, मानलो, तो, ग घ = २०−य अब, क ख घ, और क ग घ, समकोण त्रिभुजों से $क घ^2$ के दो स्वरूप आसक्ते हैं.

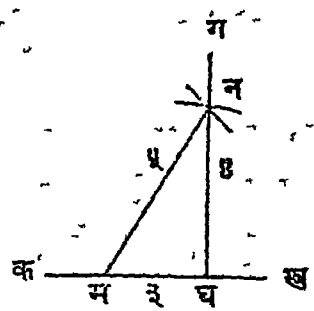
यथा, अनु० २ से, क घ^२ = १०^२ − य^२ तथा, क घ^२ = १२^२ − (२० − य)^२ परंतु ये एक ही वस्तु के स्वरूप हैं इसलिये अवश्य, समान हैं ∴ १२^२ − (२० − य)^२ = १०^२ − य^२, इस समी० से, य, = ८.६ आता है यही ख घ, आबाधा है, तथा लंब के अर्थ, क घ = १०^२ − ८.६^२ यह समी० है, इस से क घ = ४.५५ इसी से त्रिभुज का क्षेत्रफल भी = २० × ४.५५ ÷ २ = ४५.५.

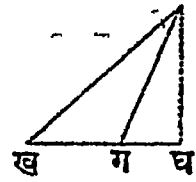
२. पूर्व्व उदा० वत् उत्तर चाहिये, जब, क ग = ६, क ख = ४, और ख ग = ५. ∴ उत्त० ख घ = .५, क घ = ३.९६ और क्षेत्रफल = ६.६.

४= जरीब, वा डोरी से भूमि पर लंब डालने का प्रकार ॥

यथा, क ख, डोरी की रेखा में, घ दिये बिन्दु से, घ ग लंब डालना चाहिये ॥

घ म = ३० कड़ी मापकर, डोरी का एक सिरा, म, पर रखकर, ९०, कड़ी को म न घ, की सीध में डाललो अब, न घ = ४० कड़ी और, ∴ म न = ५० करता हुआ, न, पर एक वश रक्खा जावे तो, घ न, वर्द्धित रेखा आकांक्षित लंब होगी

ग न ५ ४ क म ३ घ ख

क्योंकि म न घ समकोण त्रिभुज होगा इसका हेतु यह है कि ३^२ + ४^२ = ५^२. और इन्हीं के तुल्य घातों का यही लक्षण होता है ॥

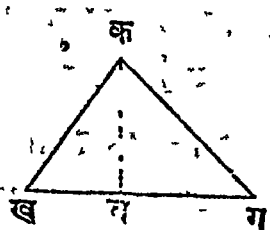
४६. साध्य प्र०— अधिक कोण त्रिभुज में, अधिक कोण के सन्मुख, क ख, भुज का वर्ग, ख ग, ग क, अन्य दो भुजों के वर्गयोग से, ख ग, आधार और अधिक कोण से लंब की, ग घ दूरी के द्विगुणित घात के तुल्य, अधिक होता है;

अर्थात्, $क\ ख^2 = ख\ ग^2 + ग\ क^2 + २\ ख\ ग . ग\ घ.$

क्योंकि ४४. प्र० से, $ख\ घ^2 = ख\ ग^2 + ग\ घ^2 + २\ ख\ ग . ग\ घ.$

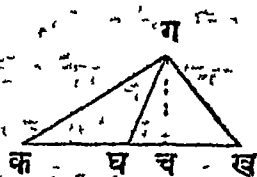
इन समानों मे, $क\ घ^2$, जोड़ने से, $ख\ घ^2 + क\ घ^2 = ख\ ग^2 + ग\ घ^2 + क\ घ^2 + २\ ख\ ग . ग\ घ.$ परंतु $ख\ घ^2 + क\ घ^2 = क\ ख^2$, और, $ग\ घ^2 + क\ घ^2 = क\ ग^2$

$\therefore क\ ख^2 = ख\ ग^2 + क\ ग^2 + २\ ख\ ग . ग\ घ.$ ॥

५०. साध्य प्र०— क ख, न्यून कोण के सन्मुख होवे तो $क\ ख^2 = ख\ ग^2 + क\ ग^2 - २\ ख\ ग . ग\ घ$ ॥

क्योंकि, ४४. प्र० (२) समी० से, $ख\ घ^2 = ख\ ग^2 + घ\ ग^2 - ख\ ग . ग\ घ$, इन तुल्यों में, $क\ घ^2$ जोड़ने और पूर्व्व साध्यवत् क्रिया करने से, $ख\ घ^2 + क\ घ^2 = ख\ ग^2 + ग\ घ^2 + क\ घ^2 - २\ ख\ ग\ ग\ घ$, $\therefore क\ ख^2 = ख\ ग^2 + क\ ग^2 - २\ ख\ ग \times ग\ घ.$

५१. साध्य प्र०— हर एक, क ख ग, त्रिभुज में सिरे से आधार के मध्य तक, ग घ, खैंची जावे तो, $क\ ग^2 + ख\ ग^2 = २\ क\ घ^2 + २\ ग\ घ^2$ आवेगा ॥

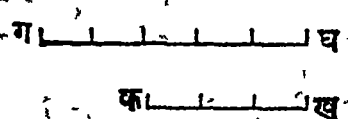
यथा, क ख, पर, ग च, लंब डालने से, क ग घ, ख ग घ दो त्रिभुजों से, उक्त दो साध्यों के अनुसार,
क ग,^{2} = क घ,^{2} + ग घ^2+ २ क घ, घ च.

ग
क घ च ख

तथा, ख ग^2= ख घ^2 + ग घ^2—२ ख घ घ च

अब, इन तुल्यों को जोड़ने और, क घ = ख घ, पर दृष्टि करने से, क ग^2+ ख ग^2= २ क घ^2+२ ग घ,^{2} आता है ॥

रेखा, तथा क्षेत्रों की निष्पत्ति : सजातीय त्रिभुज ॥

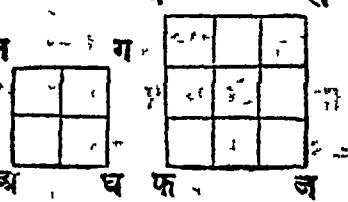
५२ दो रेखा, वा कोई प्रकार की राशी की निष्पत्ति, वा सम्बन्ध. उन्हों के सापेक्ष्य परिमाण को कहते है ॥

ग घ
क ख

यथा, क ख, में तीन एकाई, और ग घ, में पांच एकाई होवें तो, ग घ, पांच गुणित, क ख, की तिहाई के तुल्य होगी.

वा साधारण से उन्हों का सम्बन्ध ऐसे लिखा जायगा, $\frac{\text{ग घ}}{\text{क ख}}=\frac{5}{3}$ इस से यह जाना जाता है कि ग घ, में क ख, जे बेर जासके वही, ग घ का क ख से सम्बन्ध होगा.

अर्थात् भाज्य का भाजक से सम्बन्ध, उन्हो की लब्धि है वा. लब्धि ही का, नामान्तर सम्बन्ध वा निष्पत्ति है ॥

इसी प्रकार से, फ ल, वर्गक्षेत्र में, नो वर्ग की एकाई, तथा अ ग, वर्गक्षेत्र मे, चार वर्ग की एकाई होवे तो, फ ल, क्षेत्र, नो गुना, अ ग, क्षेत्र की चौथिआई होगा, अथवा $\frac{\text{फ ल}}{\text{अ ग}}=\frac{9}{4}$ ॥

न ग व ल
अ घ फ ज

दो निष्पत्ती समान होवें तो उसे अनुपात कहेंगे, वा वे सम्बन्धी राशें समनिष्पत्तिक होवेंगी, ॥

यथा, $\frac{\text{ग घ}}{\text{क ख}} = \frac{५}{३}$ होवे तो यह अनुपात होगा, ग घ, : क ख, :: ५ : ३ वा साधारण से, गघ से, क ख, की निष्पत्ति, ज झसे, च छ, की निष्पत्ति, के तुल्य होवे तो $\frac{\text{क ख}}{\text{ग घ}} = \frac{\text{च छ}}{\text{ज झ}}$ .. .. .. (१)

क ——— ख
ग ——— घ
च ——— छ
ज ——— झ

निष्पत्ति की इस साम्य को, अनुपात के, साधारण स्वरूप में लिखने से यह आकार होगा क ख, : ग घ :: च छ : ज झ .. .. (२) ॥

इसे बोलने से शब्द में, ऐसे प्रकाशित करते है जैसी, क ख, ग घ को है वैसी ही च छ, ज झ को है, वा, ग घ को क ख, जैसी च छ है ज झ को इस अनुपात के (१) लक्षण से, गुणने से, क ख. ज झ = ग घ. च छ, ... (३) ॥

अर्थात् हरएक अनुपात में छोर की राशों का घात मध्य राशों के घात के तुल्य होता है ॥

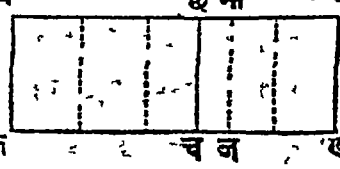
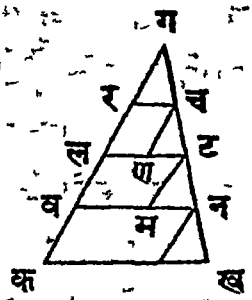
भाग देने से इस पिछले समी० से $\frac{\text{क ख}}{\text{च छ}} = \frac{\text{ग घ}}{\text{ज झ}}$ वा, क ख : च छ, :: ग घ : ज झ. इस से यह जाना जाता है कि (२) समी० वत् चार राशें अनुपात में होवें तो दो मध्य राशों के परिवर्त्तन से भी वे चारों अनुपात ही में रहेंगी इस से राशों का परिवर्त्तन वा एकान्तर निष्पत्ति कहते है ऐसे ही ग घ : क ख :: ज झ : च छ. यहां (२) अनुपात की राशें बदल दी हैं.

तथा, क : ख :: ग : घ, और क : ख :: च : छ भी मान लो, तो, ग : घ :: च : छ क्योंकि, पहिले अनुपात से $\frac{क}{ख} = \frac{ग}{घ}$, और दूसरे से $\frac{क}{ख} = \frac{च}{छ}$, अब इस साम्य से $\frac{ग}{घ} = \frac{च}{छ}$, और ∴ ग : घ : च : छ, और भी अनेक धर्म सहज ही आसक्ते हैं *॥

अवधि विवेचन का भी कुछ विषय छात्रों को अवश्य जानना, और उस के द्वारा कोई रेखागणितीय साध्यों को सिद्ध करना चाहिये॥

यथा, क + ग य = ख + घ र, एक ऐसा समी० है जिस में, क ख, तो दृढ़ राशि है परंतु ग य, घ र, अनियत वा परिवर्त्य, य, और, र, को घटाने से चाहो जहां तक सूक्ष्म हो सक्ती हैं; इसी से, क = ख, और, ग य = घ र आसक्ते हैं, क्योंकि पक्षपरिवर्त्तन से, ग य − घ र = ख − क; अब, ख, क, के तुल्य न होवे तो उन्हीं का अन्तर कुछ नियत राशि, श, मानलो तो ग य − घ र = श, अब, इस समी० से यह जाना जाता है कि, ग य, और, घ र, का अन्तर श, नियत राशि से कम नहीं हो सक्ता, जो अनुभव वा पक्ष के विरुद्ध है इस से, क = ख, और ग य = घ र, अवश्य ही होवेगा यह, अवधि की प्रक्रिया के हेतु की व्यवस्था है यहां, य, और, र, को घटाने से, क, और ख, के मान एक दूसरे के आसन्न होते जाते है ऐसा कि उन्हीं का अन्तर हर एक राशि से, जो मानी जासक्ती है, कम होगा, इस माने समी० की अवधि लेने से, क = ख, अन्त में आवेगा ॥

४० साध्य के प्रयोग मे के सूत्र का, इस रीति के द्वारा, विशेष दृढ़ता से ठीक २ स्थापन हो सक्ता है ॥

यथा, एक ही उंचाई के, क ख ग घ, क च छ घ,

५३. साध्य प्र० — क ग, के कितने ही समान भाग, ग र, = र ल = ल व, करलो, और र च, ल ट, व न, क ख के समान्तर खैंच लो तो, ख ग, के उतने ही समान भाग, ग च, = च ट = ट न, होजावेंगे

यथा, च ण, ट म, क ग, के समान्तर खैंचलो, तो, ग र च, च ण ट, त्रिभुज एक से होंगे, क्योंकि, च र, ण ल, समान्तर रेखाओं का समान्तर बाहु बनेगा· इसी से, च ण = र ल = ग र, तथा ∠ ट च ण = ∠ च ग र और ∠ च ण ट = ∠ ग र च, इसलिये, १७. प्र० से, च ट = ग च, ऐसे ही न ट = ट च, होवेंगी इत्यादि ॥

आयत एक दूसरे को हैं जैसे कि इन्हों के, क ख, क च, आधार है प्रथम, आधारों को एक परिमेय, अर्थात् किसी और रेखा के ठीक २ गुण मानलो, और, क ख, के तुल्य पांच भाग मानलो जिन्हों में से तीन, क च में हैं, अब, हरएक तुल्य भाग के चिन्ह से आधार पर लम्ब डाललो तो इस प्रकार से पांच समान आयत बन जावेंगे जिन्हों में से, क ख ग घ, में तो पांचों पर, क च छ घ, में तीन ही होंगे इसलिये, $\frac{\text{क ख ग घ}}{\text{क च छ घ}} = \frac{5}{3}$ वा $\frac{\text{क ख}}{\text{क च}}$; वा अनुपात के आकार में, क ख ग घ : क च छ घ :: क ख . क च, यह प्रकट ही है कि क ख, की क च से चाहो जो निष्पत्ति होवे, अनुमान प्रकार ठीक २ ऐसा ही होवेगा, अब, आधारों को भिन्नपरिमेय मानलो, और, क ख, के कितने ही समान भाग करलो, जिन्हों में से ज, भाग बिन्दु च, के निकट हो तो; क्योंकि, क ख, क ज, एक परिमेय है इसलिये, $\frac{\text{क ज झ घ}}{\text{क ख ग घ}} = \frac{\text{क ज}}{\text{क ख}}$, वा $\frac{\text{क च छ घ}}{\text{क ख ग घ}} + \frac{\text{च ज झ छ}}{\text{क ख ग घ}}$

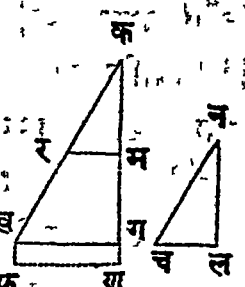
अनु० क ग, में कोई, ल, विन्दु लेने से जाना जायगा कि, ग ल, से जे गुणी, क ग होगी उतने ही गुणी, ग ट, से, ख ग होगी अर्थात् $\frac{\text{क ग}}{\text{ग ल}} = \frac{\text{ख ग}}{\text{ग ट}}$ अथवा क ग : ग ल :: ख ग : ग ट ॥

५४. साध्य प्र० — तुल्य कोण त्रिभुज सजातीय होते हैं अर्थात् उन्हों के सदृश भुज एक निष्पत्तिक होते हैं॥

यथा, क ख ग, और, च ल न, दो तुल्य कोण त्रिभुज हैं जिन्हों के ∠ क = ∠ न, ∠ ख = ∠ च, और ∴ ∠ ग = ∠ ल, तो, क ख : क ग :: न च : न ल, क्योंकि, क र = न च, और, क म = न ल, लेकर, र और, म विन्दु जोड़दो, तो, क र म त्रिभुज, न ल च, के समान होगा, तथा ∠ र = ∠ च, वा ∠ ख इसलिये, (३० प्र०), र म, ख ग, के समान्तर होगी — अब, क र, र ख, कितने ही समान भाग मानलो,

---

$= \frac{\text{क च}}{\text{क ख}} + \frac{\text{ख ज}}{\text{क ख}}$ परंतु च ज : भ छ, और, च ज चाहे जितनी सूक्ष्म हो सक्ती हैं जब कि और सब यथावस्थित ही रही आवें, इसलिये, अवधि की रीति से, $\frac{\text{क च छ घ}}{\text{क ख ग घ}} = \frac{\text{क च}}{\text{क ख}}$ ∴ क ख ग घ, और, क च ज न, आयत एक दूसरे को है जैसे कि उन्हों के आधार और लंबों के घात हैं।

∴ न ज, को ल, तक बढ़ा लो, तो, पूर्व्व साध्य से $\frac{\text{क ख न ल}}{\text{क च ज न}} = \frac{\text{क ख}}{\text{क च}}$, तथा, $\frac{\text{क ख ग घ}}{\text{क ख ल न}} = \frac{\text{क घ}}{\text{क न}}$, इन समी० को गुण देने से, $\frac{\text{क ख ग घ}}{\text{क च ज न}} = \frac{\text{क ख}}{\text{क च}} \times \frac{\text{क घ}}{\text{क न}}$ अब, क न, और, क च, प्रत्येक को एकाई मान, तो, क च ज न, वे च की, एकाई होगी,

ओर, इन भागों में होकर ख ग, के समान्तर रेखा खेंची जावें, तो पूर्व्व साध्य से, क म, के उतने ही समान भाग होजायंगे जितने, क र, के हैं, तथा, क ग, के भी उतने ही समान भाग होजायंगे जितने कि, क ख, के हैं; इस से यह आता है, कि क र, वा, न च, से जै गुणी क ख, होगी उतने ही गुणी, क म, वा, न ल, से, क ग होवेगी; अर्थात् $\frac{\text{क म}}{\text{न च}}=\frac{\text{क ग}}{\text{न ल}}$ वा, क ख : न च, :: ग क : न ल, और एकान्तर निष्पत्ति से (प्र० ५२) क ख : ग क :: न च : न ल.

ओर, ∴ क ख ग घ, क्षेत्र की एकाई = क ख × क घ.

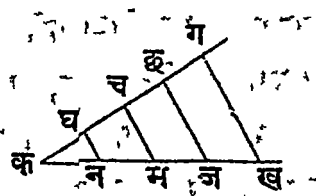
यहां क ख, और क घ, उन्हीं की रेखात्मक एकाइयों के स्थान में रक्खी है इसी से, इस रीति, से, यह वाक्य सिद्ध हुआ है कि समान्तरबाहु का क्षेत्रफल, आधार और लंब के घात के तुल्य होता है. तथा हर एक त्रिभुज तुल्य आधार औच्य के समान्तर बाहु से आधा होता है इसी से त्रिभुजों का क्षेत्रफल उन्हींके आधार और लंबके आधे घात के समान होता है॥

---

*क र, और, क ख, रेखा भिन्नपरिमेय होवें अर्थात् क र, के जैसे भाग हुए हैं वैसे, क ख, के न होसक्ते होवें तो साध्य को इस रीति से सिद्ध किया चाहिये. — यथा, क र, के कुछ तुल्य भाग करलो, और उन्हीं में से एक को, र, से, ख, की ओर माप आओ, अब, ख फ, भाग उसकी बढ़ती मानलो और, ख ग, के समान्तर, फ ण, खैंचलो — अब क्योंकि, क फ, और, क र, एक परिमेय हैं इसलिये पूर्व्व साध्य के अनुसार. $\frac{\text{क फ}}{\text{क र}}=\frac{\text{क ण}}{\text{क म}}$, परंतु, क फ = क ख, + ख फ, और, क ण = क ग + ग ण, ∴ अतिदेश से $\frac{\text{क ख}+\text{ख फ}}{\text{क र}}=\frac{\text{क ग}+\text{ग ण}}{\text{क म}}$ वा $\frac{\text{क ख}}{\text{क र}}+\frac{\text{ख फ}}{\text{क र}}=\frac{\text{क ग}}{\text{क म}}\cdot\frac{\text{ग ण}}{\text{क म}}$ अब क र, के भागों की संख्या बढ़ाने से, ख फ और, ग ण,

पूर्व्वसाध्य के प्रयोग ॥

१. क ख दी रेखा के कुछ समान भाग करो. यथा चार भाग करने को मानलो,

क, से कोई क ग, एक रेखा खैंचकर, कंपास को कुछ खोलकर, क घ, घ च, च छ, और छ, ग, चार समान भाग करलो अब, ख, और ग, को जोड़कर ख ग, के समान्तर, छ ज, च म, घ न, खैंचलो, तो क न = न म = म ज = ज ख॰

२. कर्ण माप नाम यंत्र—इस माप में इ ण, ण व, व स इत्यादि हरएक तुल्य भागों मे १०० अंश हैं तथा, इ ण के तुल्य १० भाग किये हैं इस से उसके हर एक भाग में १० अंश होगे

अधिकाइयों को चाहो जितनी सूक्ष्म करसक्ते है; इसलिये $\frac{\text{ख फ}}{\text{क र}}$ और $\frac{\text{ग ण}}{\text{क म}}$ अत्यन्त सूक्ष्म होसक्ते है और इसी से अन्त मे $\frac{\text{क ख}}{\text{क र}}$ $= \frac{\text{क ग}}{\text{क म}}$ (५२ पृ० का टिप्पन देखो) आवेगा.

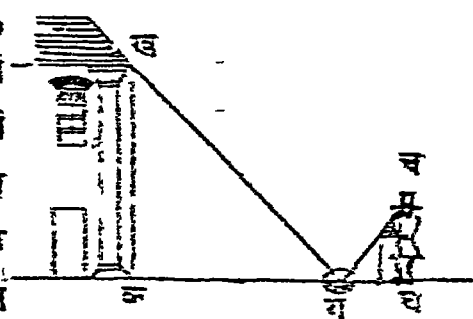
यह साध्य, ६४ पृ० की टिप्पन की रीति से भी ठीक रूप से सिद्ध हो सक्ता है ॥

---

*प अक्षर(१० ल) कर्ण रेखा पर है ॥

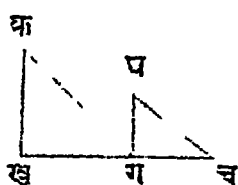
और कर्ण रेखा, १८ से न. २० से १०, ३० से २० तक इत्यादि क्रम से डाली गई है इसलिये उन्हों के द्वारा हर एक अंश भी आसका है.

यथा, न, से प, तक दूरी ४०१ होगी तथा न, से ३ आड़ी रेखा फ, १० प, कर्ण तक दूरी ४०२ होगी इत्यादि और ३५४· अंश चाहने होवें तो प्रथम, श, से ५० तक कंपास रखने से ३५० आवेंगे और चार. ४· अंश के लिये कंपास की बाईं नोक को, श भ खड़ी रेखा पर, पांच वीं आड़ी रेखा तक लाकर दूसरी नोक को; ५० कर्ण और ५ आड़ी रेखाओं के संपात बिन्दु तक चला-लाने से आकांक्षित ३५४· अंश की दूरी आजावेगी.

३. ग पर तिरछे रक्खे दर्पण के द्वारा एक पदार्थ की, क ख, उंचाई ले आना. यथा, घ, पर खड़े होने से, किसी पदार्थ की, ख, चोटी दीखती है, तो क्योंकि प्रकाश की किरण का पातकोण सदैव परावृत्ति कोण के तुल्य होता है इस

से यह आता है कि ∠क ग ख = ∠घ ग च इसी से, क ख, ग, घ ग च, त्रिभुज सजातीय हैं इसलिये, ग घ : घ च :: क ग : क ख·

$\therefore$ क ख = $\frac{\text{क ग} \times \text{घ च}}{\text{ग घ}}$. अब मान लो कि मापने से, क ग =१००, ग घ = ६. और दृष्टि की उंचाई, घ च = ५ फुट आवे तो, क ख पदार्थ की उंचाई = ५ × १०० ÷ ६ = ८३ $\frac{1}{3}$ फुट.

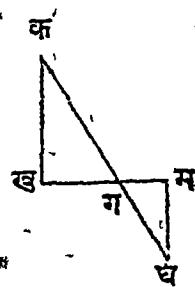
४. यष्टि वा, स्तंभ की छाया से किसी बुर्ज की उंचाई लेजाना,

यथा, क ख, बुर्ज की उंचाई ख ग, छाया, ग घ, यष्टि की उंचाई, और ग च, छाया है तो सूर्य्य की, क ग, घ च, किरणें (जो छायाओं के सिरे बांधती हैं एक दूसरी के समान्तर हैं इससे यह आता है कि ∠ ख ग क = ∠ ग च घ; इसलिये, क ख ग, ग च घ, त्रिभुज सजातीय हैं, और ∴ ग च . घ ग : ख ग : क ख. ∴ क ख = $\frac{\text{ख ग} \cdot \text{घ ग}}{\text{ग च}}$.

(उदा० १) जिस समय, १० फ़ुट के बांस की छाया ७ फ़ु० थी, एक बुर्ज की छाया, १४० फ़ुट थी कहो उस की क्या उंचाई थी ?

यहां ७ : १० : १४० : क ख = २०० फ़ुट

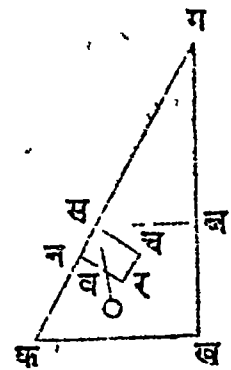
(२) पूर्व्ववत् उत्तर चाहिये जब ग घ=५, ग च=४, और, ख ग = ६४ फ़ु० है, ... उ० ८० फ़ु०

५ किसी, क, पदार्थ की क ख दूरी, उस ले बिना गये होले आना

यथा, स्वस्तिक वश, वा वेधयंत्र से, क ख, पर, ख म, लंब डालकर, ख ग, ग म, कोई, उपयुक्त दूरी लेलो; और, ग, पर झण्डा खड़ा करके, ख म, पर, म घ, लंब डाललो, और, घ, पर ऐसा झण्डा खड़ा करो कि वह, क, और, ग, की सीध मे होवे, अब, म घ, मापलो, तो ∠ ख ग क = ∠ म ग घ, और समकोण होने से ∠ ख = ∠ म, इसी से, ख ग क, ग म घ,) त्रिभुज सजातीय हैं ∴ ग म : म घ : : ख ग : क ख ∴ क ख = $\frac{\text{म घ} \cdot \text{ख ग}}{\text{ग म}}$

(उदा० १) ख ग = ४०, ग म = २०, और, म घ = ६० फ़ुट रक्खो तो २० : ६० : : ४० . क ख = १२० फ़ुट.

(२.) क ख, दूरी चाहिये, जब, ख ग = ४, ग म = १, और, म घ = ३ जरीब है — — — — उत्त० १२ जरीब,

८ किसी अगम्य, ख ग, पदार्थ की उचाई को छेदीयवर्ग नाम यंत्र से मापने का प्रकार ॥

छेदीयवर्ग, एक, न स च र, चौखटे का होता है जिस का हर एक, स च, च र, और, र न, भुज में १००, अंश चिन्हित होते हैं, तथा, स कोण से एक, सब साबल लटकता होता है और, न स, भुज पर दो देखने के लिये छिद्र होते हैं जिन्हों के हेतु मापकजन, न स, भुज को पदार्थ की, ग, चोटी की सीध में रखते हैं इस यंत्र से पदार्थों की उचाई सजातीय त्रिभुजो के लक्षण से अनायास ही आजाती है —यथा,

१. प्रकार —जब, साबल न र, भुज को काटता है;

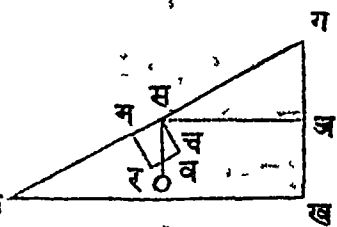
स ज, को क्षितिज के समानान्तर और भूमि से यंत्र की उंचाई, ख ज, रखलो, और इस आधार रेखा, स ज तथा यंत्र की उंचाई, ख ज, को मापलो, अब, न, और, च, दृष्टि पथों को पदार्थ की, ग, चोटी की सीध में रख कर, न व, में के अंश गिनलो, तो, न व स, ग ज स, त्रिभुज सजातीय होंगे. क्योंकि, स व, ग ख, के समान्तर है इस से ∠न स व = ∠ स ग ज, तथा, समकोण होने से ∠ न = ∠ ज, ∴ न व : न स : : स ज : ज ग, $=\frac{\text{न स}\cdot\text{स ज}}{\text{न व}}$ और ख ग उंचाई $=\frac{\text{न स}\cdot\text{स ज}}{\text{न व}}$ + ख ज.

(उदा० १) स ज = ६६, न व = २०, और, ख ज, = ५ फुट

है, यहां २० : १०० : : ६६ . ग ज, = ३३०, और, ख ग = ३३० + ५ = ३३५ फुट

२ ख ग उंचाई चाहिये, जब कि स ज = ६०, न व = ५०, और यंत्र की उंचाई ख ज = ६ फुट है उ०—१२६ फुट.

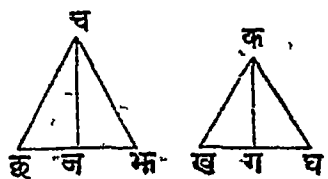
२. प्रकार—जब, साबल च र, भुज को काटता है.

इस प्रकार मे स ज ग, स च व, त्रिभुज सजातीय हैं और इससे, यह आता है, खग = $\frac{चव\ सज}{सच}$ + ख ज

उदा० १. ज स = ६६ अ च = ६०, और, ख ज = ५ फुट

यहां, १०० . ६० : ६६ : ग ज = ३९.६ और ∴ ख ग = ३९.६ + ५ = ४४.६ फुट.

२. ख ग, चाहिये, जब कि, ज स = १०० व च = ८०, और, ख ज = ५ फु० है ------------------------------ उ० ८५.

५५ सा० प्र० — तुल्य कोण वा सजातीय त्रिभुजों की निष्पत्ति, उन्हीं की सदृश भुजाओ के वर्गों की निष्पत्ति के तुल्य होती है

यथा, क ख घ, च छ झ, तुल्य कोण, त्रिभुज, और उन्हो के क ग, च ज, लंब है, अब, क ख ग, च छ ज, त्रिभुज भी सजातीय होंगे ∴ $\frac{खघ}{छझ}=\frac{कख}{चछ}$ और $\frac{कग}{चज}=\frac{कख}{चछ}$

इन तुल्यों को आपस में गुणा देने से $\frac{खघ\ कग}{छझ\ चज}=\frac{कख^2}{चछ^2}$ वा

$\frac{\frac{1}{2}खघ.कग}{\frac{1}{2}छझ\ चज}=\frac{कख^2}{चछ^2}$; अर्थात् $\frac{कखघ\ क्षेत्र}{चछझ\ क्षेत्र}=\frac{कख^2}{चछ^2}$

और यह अनुपात की राह में लिखने से ऐसा होवेगा क ख घ क्षेत्र : च छ झ क्षेत्र : : क ख^2 च छ^2 साधारण से वह सिद्ध हो सक्ता है कि सब सजातीय क्षेत्रों के फल एक दूसरे को होते हैं जैसे कि उन्हों की सदृश भुजाओं के वर्ग * ॥

उदाहरण ॥

क ख ग, एक दिये त्रिभुज में से (१७. प्र० आकृ० देखो) ख ग के समान्तर, र म, रेखा से, क र म, एक भागछाटना है जिसका फल, क ख ग, की चौथाई होवे, यहां, क ख ग क्षेत्र : र क म क्षेत्र : : क ग^2 : क म^2: वा, १ . $\frac{१}{४}$ :: क ग^2 : क म^2 ∴ क म^2 = $\frac{कग^2}{४}$ और क म = $\frac{कग}{२}$

वृत्तविषयक साध्य ॥

१६. सा० प्र० — वृत्त के, ग, केन्द्र से, क ख, जीवा के मध्य बिन्दु, ल, तक खिंची, ग ल, सरलरेखा उसी जीवा पर लंब होगी, ॥

यथा, ग ल क, ग ल ख, त्रिभुज ठीकर एकसे हैं क्योंकि, ग क = ग ख, ल क = ल ख, और, ग ल, उभयनिष्ठ है; इसलिये, ∠ग ल क = ∠ग ल ख, अर्थात्, ग ल, क ख, पर लंब है.

---

* परि० सजातीय क्षेत्र वे होते हैं जिन्हों के क्रम से सब कोण एक दूसरे के तुल्य हों और तुल्य कोणों के पास की भुजा समनिष्पत्तिक होवें ।

ग ल म, रेखा पर, ग ख म, लोटलिया जावे तो, ख, विन्दु क, पर पडेगा, और ख म, चाप, क म, चाप को ढाक लेगी. इस से यह आता है कि जो रेखा ज्या आधी २ करती है वह चाप को भी आधा २ करेगी,

इसका प्रतिलोम भी ठीक है अर्थात्, क ख, पर, ग ल लंब डाला जावे तो वह उसे आधा २ करेगा,

तथा ख म क, चाप भी, म, विन्दु पर आधी २ होजावेगी क्योंकि, क ग = ख ग, इस से क ख ग, त्रिभुज समद्विबाहु है इसलिये ∠ख=∠क, अब, ग ल क, ग ल ख, त्रिभुजो मे ल ग, उभयनिष्ठ है, ल, पर के समकोण समान है, और ∠ख=∠क, इसी से(३४· प्र०) ख ग ल, क, ग ल, शेप कोण भी तुल्य हैं इस से (१६· प्र०) यह आता है कि ये त्रिभुज ठीक २ एकसे है और इसलिये ख ल = क ल ॥

अनु० किसी, भी क ख ज्या का समद्विभाजक, ल ग, लंबवृत्त के, ग केन्द्र पर होकर जावेगा ॥

उदाहरण ॥

१. एक वृत्त की, क ग, त्रिज्या १०, और क ख, जीवा १६ है, ल ग लंब चाहिये ॥

यहा, क ल= $\frac{1}{2}$ क ख= $\frac{1}{2}$ १६ = ८; अब, क ग ल समकोण त्रिभुज से, ल ग^2= क ग^2—क ल^2= १०^2— ८^2= ३६·

∴ ल ग=६·

२· क ग =२०, क ख =२४ ,ल ग, चाहिये ·· उ० १६·

३· क ग, त्रिज्या = १५ ,और ल ग = ६, क ख, चाहिये उत्तर २४·

४. ल म, शर, वा उत्क्रमज्या = २, और, क ग त्रिज्या = ५, क ख, होना चाहिये.

यहां ग ल = ग म − ल म = ५ − २ = ३;

अब, क ल = $\sqrt{५^{२} - ३^{२}}$ = ४ ∴ क ख = २ क ल = २ × ४ = ८.

५. क ख, चाहिये जब क ग = ८ और, ल म = ३ .. उ० १२.४६.

६. क ग, बताओ क्या होगी, जब, क ख = ६४ और ल म. = १६ है ?

य = क ग, रखलो, तो, क ल = ½ ६४ = ३२, ग ल = ग म − ल म = य − १६. और ∴ क ग^{२} = क ल^{२} + ल ग,^{२} वा, य^{२} = ३२^{२} + (य − १६)^{२}; इस समी० को करने से, य = ४० आवेगा.

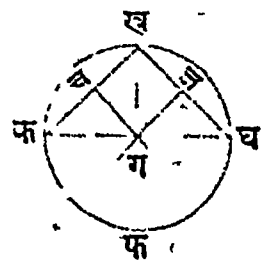
७ क ग, चाहिये, जब, क ख = ८, और ल म = २ फुट

उत्तर ५ फुट॥

१७. साध्य व०—क ख फ, दिये वृत्त का केन्द्र लाना वा निश्चित करना चाहिये॥

क ख, ख घ, कोई दो जीवा खेंचकर उन्हें, च ग, ज ग, लंबों से आधा २ करलो, तो इन लंबों का, ग, संपात विन्दु वृत्तका केन्द्र होवेगा—

क्योंकि, पूर्व्व साध्य से, वृत्त का केन्द्र, च ग, रेखा में होगा, और उसी हेतु से वह, ज ग, रेखा में भी होगा; इसलिये वह, ग, सपात विन्दु में होवेगा

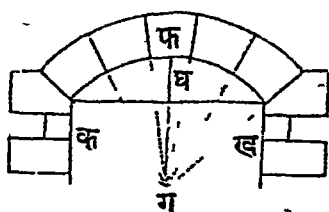
ख च ज फ घ ग फ

१८. साध्य व०—क, ख, और, घ, तीन दिये विन्दों मे होकर एक वृत्त खेंचना चाहिये, (पूर्व्व आकृति देखो)

क ख, ख घ, रेखों से उन्हों में से दो २ बिन्दो को जोड़कर, च ग, ज ग, लंबों से उन रेखो को आधा २ करलो, तो, ग, संपातवृत्त का केन्द्र होगा ॥

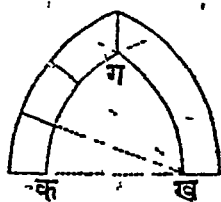
अब, ग, केन्द्र और, ग क त्रिज्या से, क ख घ, वृत्त दिये बिन्दों में होकर खैंचलो ॥

इस वस्तूपपाद्य के प्रयोग ॥

१. कोई महराव, वा गुम्मज़ निर्माण करना ॥

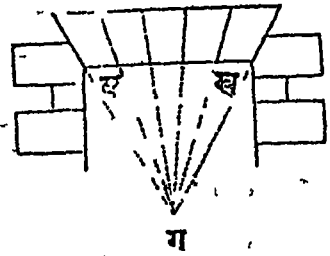
यथा, किसी महराव का, क ख, प्रादेश और, फ घ, लंब है, अब, पूर्व्व साध्य से, क, फ, और ख, दिये बिन्दो मे होकर जाते हुए वृत्त का, ग, केन्द्र निश्चित करके, क फ ख, चाप के कई उपयुक्त तुल्य भाग करलो, और

इन भाग चिन्हों को ग, केन्द्र से जोड़ दो तो, इस से, महराव के पत्थरों के जोड़ आजायंगे और वे पत्थर पच्चर की आकृति होने से एक दूसरे को गिरने नही देंगे ॥

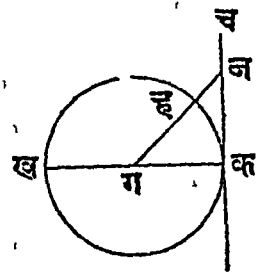
२. गाथिक* नाम प्रकार की महराव बनाना ॥

यथा, क ख, महराव का प्रादेश है, तो, क, केन्द्र और, क ख त्रिज्या, तथा, ख, केन्द्र और ख क त्रिज्या से, ग, पर एक दूसरी को काटती हुई वृत्त चापें खींचकर, और, क ग, ख ग, चापो के कितने ही तुल्य उपयुक्त भाग करके क ग, चाप के इन भाग

*गाथ देशवालों के प्रकार की ॥

चिन्हों को, ख, केन्द्र, और, ख ग, चाप के भाग चिन्हों को क, केन्द्र से मिलाने से, महराव के पत्थरों के जुड़ाव आजावेंगे॥

३. कोई महराव वनाना, जब, क ख, लदाव की दौड़ रेखारूप है,

यथा, क ख, प्रादेश के कुछ तुल्य उपयुक्त भाग करके, और उस पर, क ख ग, समद्वि-वाहु बनाकर रेखा जोड़दो तो इस प्रकार में पत्थरों के जोड़ की रेखाओ का, ग, केन्द्र होगा.

५६ साध्य. प्र० — ग क, त्रि-ज्या के छोर पर का, क च लंब वृत्त की, स्पर्द्धिनी होवेगा.

यथा, क च, में कोई, ज, विन्दु लेकर उसे, ग, वृत्तकेन्द्र से जोड़दो तो, क्योंकि, ग क ज, एक समकोण त्रिभुज है इस को, ग ज कर्ण (४७· प्र० अनु० १)· ग क, वा ग ह से बडा होगा और इसी से, ज बिन्दु वृत्त के बाहर होगा. अब क्योंकि यही, प्रक्रिया हर एक, क च, के बिन्दु के लिये होसक्ती है·

इस से यह आता है कि यह रेखा केवल क, पर वृत्त को छूती है अर्थात् यह स्पर्द्धिनी है.

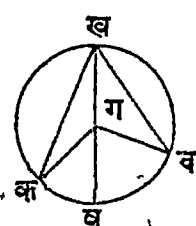
इस साध्य का प्रतिलोम भी ठीक है, अर्थात्, क च, वृत्त स्पर्द्धिनी होवे तो, क ग त्रिज्या इस परलंब होगी.

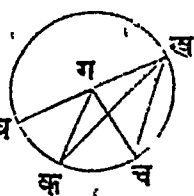
क्योंकि, क च स्पर्द्धिनी, क, स्पर्श बिन्दुको छोड़ करसर्वथा वृत्त के बाहर है इस से, ज, बिन्दु वृत्त के बाहर होगा. और

हर एक, ग च रेखा ग ह, वा ग क, त्रिज्या से बड़ी होगी. वा, ग, से, क च, तक जो रेखा खिंच सकेगी उन्हों में, क ग, सब से छोटी होवेगी और इसी से (२५ प्र०) ग क, क च, पर लंब होगा.

६०. साध्य. प्र० — वृत्त के, ग, केन्द्र पर का हर एक, क ग च, कोण पालिगत, एक ही चाप, क व च, पर के, क ख च, कोण से दूना होगा

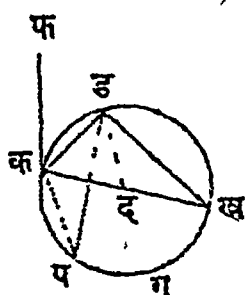
इस साध्य के दो प्रकार हैं.

पहिला वह है जिस में, ग केन्द्र क ख च, कोण के भीतर है और दूसरा, जब केन्द्र उसके बाहर है

ख ग, को जोड़कर उसे, व, तक बढ़ा दो, अब, क ग ख, त्रिभुज समद्विबाहु है ∴ ∠ ग ख क= ∠ग क ख, परंतु ३४ प्र० से, बाहर का, ∠क ग व = ∠ ग ख क + ∠ ग क ख,

∴ ∠ क ग व =२ ∠ ग ख क, और ठीक ऐसेही ∠ च ग व = २ ∠ ग ख च.

अब प्रथम प्रकार मे इस साध्य को सिद्ध करने के लिये तो इन समानो को जोडने से, ∠ क ग व+ ∠ च ग व =२ ∠ ग ख क + २ ∠ ग ख च, ∴ ∠ क ग च = २ ∠ क ख च,

और दूसरे प्रकार मे सिद्ध करने को, घटाने से, ∠ च ग व − ∠ क ग व = २ ∠ ग ख च − २ ∠ ग ख क ∴ ∠ क ग च = २ ∠ क ख च.

अनु० १. ख क घ, ख च घ, आदि एक चापस्थ, सब कोण समान है और ख घ, चाप के आधे से मापे जाते हैं; क्योंकि इन्हीं में से हर एक कोण, ख ग घ, कोण के आधे के समान है.

अनु० २. क ड ख, अर्द्धवृत्त में का, क ड ख, कोण, समकोण है क्योंकि यह, क ग ख, चाप के आधे, वा १८०° के आधे = ९०° से मापा जाता है.

अनु० ३ क, बिन्दु पर, क फ, वृत्तस्पर्द्धिनी होवे तो, क ड जीवा से कटा ∠ ड क फ, कटी हुई क ड, चाप पर स्थित पालिगत ∠ ख, के समान होगा.

क्योंकि, क ख, व्यास है इस से ∠ फ क ख = समकोण, परंतु ∠ ड क ख + ∠ ख = समकोण, ∴ ∠ फ क ख = ∠ ख + ∠ ड क ख, इन दोनों तुल्यों में से ∠ ड क ख, लेडालने से, ∠ ड क फ = ∠ ख.

पूर्व्वसाध्यों के प्रयोग ॥

१. क ड एक दी रेखा पर, क ड ख ग, वृत्त बनाना चाहिये जिस में ख, कोण एक दिये कोण के तुल्य होवे (पूर्व आकृ० देखो).

दिये कोण के तुल्य, ड क फ, कोण बनाती हुई, क फ, रेखा, तथा इस पर, क ख, लब खींच कर, ड क ख, के तुल्य, क ड द कोण बनाता हुआ ड, से ड द, लब खींच लो, तो आकांक्षित वृत्त का, द, केन्द्र होगा (६० प्र० अनु० ३)॥

२. क, और ड, दो पदार्थों मे ३ मील दूरी है (पूर्व्व आकृ० देखो).

और एक मापक ने, क प ड कोण (= ४५°) जो दोनों पदार्थ, प, स्थान से बनाते है लेकर, प ड (=४ मील) मापी.

अब निर्माण से, क, पदार्थ से उसकी दूरी चाहिये.

उत्त० प क = १·८ वा क ख = ३·८ मील.

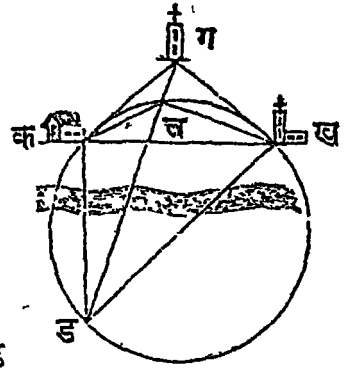
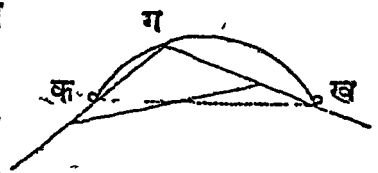
यथा, समभाग की माप से, क ड = ३ लेकर पूर्व्व उदाहरण की रीति से एक क ग ख ड, वृत्त वनाओ जिस मे, क प ड कोण = ४५° होवे अब, ड केन्द्र से, मापके ४ भाग के तुल्य त्रिज्या से, क ग ड, वृत्त को, प, और ख, मे काटता हुआ एक वृत्त खैंचकर, प क, को जोड़ दो तो यही आकांक्षित दूरी होवेगी यहां स्फुट है कि ड, केन्द्र पर बना वृत्त, क ग ड वृत्त को, प, ख, दो बिन्दो मे काटेगा, इसी से प्रश्न के दो उत्तर होसक्ते हैं·

अर्थात् प क वा ख क, दूरियों से प्रश्न का नियम पूरा होता है*॥

३. क, ख, ग, तीन पदार्थों की एक दूसरे से दूरी, क ख = १२, ख ग = ७·२· और क ग = ८ मील है और एक, ड, स्थान से, ख ड ग = २५° तथा, ग ड क = १६° के कोण देखे गये है कहो, ग ड दूरी क्या होवेगी ?

---

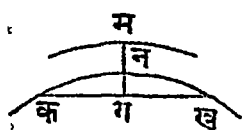
* इस प्रश्न के डौल का एक और प्रकार है ॥

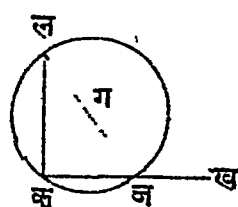
क ख ग, त्रिभुज, बनाकर, ∠ क ख च = १६° अर्थात् ∠ ग ड क के तुल्य बनाती हुई, ख च, रेखा खींचो, ऐसी ही क, से ∠ ख क च = २५° अर्थात् ∠ ख ड ग, के तुल्य बनाती हुई, क च, रेखा खींचो, और, क, ख, च, तीन बिन्दुओं में होकर, (प्र० ५८) क ड ख च, वृत्त वनाओ, अब, ग च, को जोड़ कर उसे बढ़ादो कि वह, ड, बिन्दु पर वृत्त को काटे, तो यही वह स्थान होगा और ड ग, आकांक्षित दूरी = १५ मील होगी· क्योंकि ६० प्र० से ∠ क ख च = ∠ क ड च और ∠ ख क च = ∠ ख ड च ॥

४· क, ख, ग, तीन चिन्हों में होकर, केन्द्र के बिना ही निश्चित किये एक वृत्त चाप खेंची चाहिये·

क, ख, स्थानों पर दो कीलें जमा कर और, क ग, ख ग, दो लग्गियां लेकर, आकृति की रीति पर जमा दो अब, इस तिखूंटे ढाचे को आस पास इस रीति से फिराओ कि, क ग, ख ग भुजों का दवाब निरन्तर, क, ख, कीलों पर रहे, तो, ग, सिरे पर, लगी पेन्सिल, आकांक्षित वृत्त बनावेगी * ॥

---

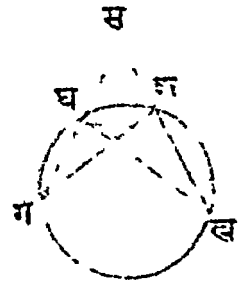
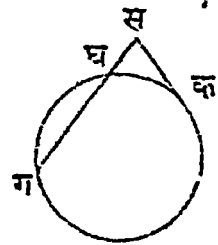
* कारीगर बहुधा इसी रीति से वृत्त बनाते है जब कि त्रिज्या बहुत वड़ी होती है ॥

५· किसी, क न ख, महराव के, न म जोड को, वृत्त केन्द्र के विना ही जाने, निश्चित करलेना॥

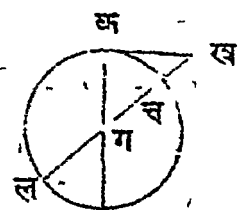
दिये, न बिन्दु के दोनों ओर न क = न ख लेकर, और, क ख, खैंचकर उसे, ग न म लंब से (२२· प्र०) आधा २ करलो, तो, महराबी पत्थर का, म न, आकांक्षित जोड होवेगा· क्योंकि म ग अवश्य केन्द्र को जायगी, ॥

६ क ख, दी रेखा पर, क, सिरे से, क ल, लंब डालना चाहिये

किसी, ग, बिन्दु को केन्द्र, और, ग क, के समान त्रिज्या से, क ल ज वृत्त वनाओ, जो, क ख, को, ज, बिन्दु मे काटे, और ग ज, को जोड़कर वढादो कि यह उस वृत्त को, ल, चिन्ह पर काटे अव, क ल, जोड़ देने से यही आकांक्षित लंब होगा क्योंकि ल क ज, अर्द्धवृत्त होगा, और इसी से, ∠ क समकोण होगा अर्थात्, क ल, लंब होगा ॥

६१ सा० प्र०— दो रेखा, वृत्त के भीतर, वा बाहर, स बिन्दु पर संपात करे तो एक के खण्डों का घात दूसरी के खण्डों के घात के तुल्य होगा, अर्थात् ख स. क स = स ग. स घ ॥

क ग, ख घ, जोड़दो तो, दोनो त्रिकों में, स घ ख, स ग क, त्रिभुज सजातीय होंगे, क्योंकि, ६० प्र० अनु० १ ∠ ग = ∠ ख और एक का ∠ स = दूसरे के ∠ स इसी से शेष ∠ स घ ख = शेष ∠ स क ग, इसी से ५४. प्र० से स ख : स ग :: स घ : स क ∴ स ख स क, = स ग. स घ. ॥

अनु० १. पहिली आकृति में, ग क घ अर्द्धवृत्त होवे तथा, ग घ, पर, क स लंब होवे तो, क स = ख स और ∴ क स² = स ग. स घ, अर्थात् अर्द्धवृत्त में, लम्ब क का वर्ग आबाधाओं के घात के तुल्य होता है॥

अनु० २ दूसरी आकृति मे, स ख, रेखा को, स बिन्दु पर घूमने दो कि वह इस पिछली आकृतिवत् वृत्त को स्पर्श करे तो, क ख, भाग लुप्त होजायगा और, स ख, स क इस प्रकार से, स क² होजायगा. इसी से, स क² = स ग स घ; अर्थात्, वृत्तस्पर्द्धिनी का वर्ग, संपूर्ण वृत्त खण्डिनी और उस के वृत्त बहिर्गत खण्ड के घात के तुल्य होता है॥

पूर्व्वोक्त विशेष गुणों के प्रयोग॥

१. समस्थता, अर्थात् भूमि की उंचाई निचाई देखने मे पृथ्वी की गोलाई के अंश का शोधन॥

यथा, समस्थ रेखा की, क ख सीध है, जो, क, से ली गई है तो, क ख, भूपृष्ठ की, क, पर स्पर्द्धिनी होगी और इसी से भू का, ग, केन्द्र होवे तो क ग, पर, क ख लंब होगा, अब, ग, केन्द्र से हो, ख ल खेचलो तो, क च, दूरी मे सत्य वा ठीक और आभासित समस्थताओं मे, च ख, मात्र

की विचल पड़ेगी परंतु २ अनु० से, ख ल. ख च = क ख.²

∴ ख च = $\frac{\text{क ख}^2}{\text{ख ल}}$ ॥

परंतु सब यथार्थ भूमि की मापों में भूव्यास की अपेक्षा ख च, अतिसूक्ष्म है इस से, ख ल, को च ल के तुल्य मानने में कुछ विशेष अन्तर नहीं पड़ता और उसी हेतु से क ख, क च, के सदृश मानी जासक्ती है अब, व = च ल भूव्यास (७९६० मील के लग भग) मानलो तो, ख च = $\frac{\text{क ख}^2}{\text{व}}$.

यहां, क ख, एक मील मानी जावे तो ख च = $\frac{१}{७९६०}$ मील = प्राय ८ इंछ. इसी से हर एक, माप के एक मील के लिये ठीक समस्थता वा भूपृष्ठ, आभासित समस्थता से ८ इंछ नीची होगी ॥

२. निश्चित करना कि कितनी दूर से समुद्र पर पदार्थ देख पड़ेगा. ख च, पदार्थ की उचाई = ल, और, क ख, दूरी= दखलो, तो पूर्ववत् व.ख च=क ख² वा, व.ल=द², ∴ द= $\sqrt{\text{व ल}}$ ॥

उदा० १. समुद्र की पृष्ठ से; टेनीरिफ़ नाम पहाड़ की चोटी द, प्राय २½ मील ऊंची है कहो वह कितनी दूर तक दीख पड़ेगी ?

यहां ल = २½ ∴ द = $\sqrt{७९६० \times २\frac{१}{२}}$ = १४१ मील ॥

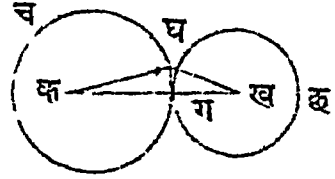
उदा० २ एक बुर्ज़ की चोटी २७ मील से दीख पड़ती है कहो वह कितना ऊंचा होगा ?— — — — — उत्त. ४१४ फुट॥

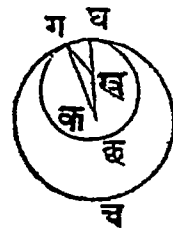
उदा० ३. समुद्र की पृष्ठ से ८० फुट ऊंचे जहाज़ के ऊपरी मस्तूल पर से, कितनी दूर से टेनीरिफ़ की चोटी दिखाई देगी?

उत्त० १५२·०४ मील.

उदा० ४· समुद्र की पृष्ठ से १ मील ऊंचा पहाड़ ८८ मील से दीख पड़ता होवे तो भूमि का व्यास क्या होवेगा ?

उत्त० ७६२१ मील·

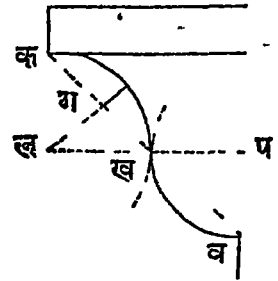
६२· सा० प्र०—दे। वृत्तो के, क, और, ख केन्द्रो की दूरी क ख, क ग, ख ग, उन्हो की त्रिज्याओ के येाग के तुल्य होवे तो वे वृत्त एक दूसरे को वाहर से स्पर्श करेंगे॥

यथा, प्रगट है कि ग, विन्दु में होकर वृत्त जावेंगे पर उन्हों का उभयनिष्ठ और कोई विन्दु नहीं होगा क्योंकि, क, वृत्त की पालि में कोई घ, विन्दु लेलो और, क घ, ख घ मिला दो, तो, क ख घ, त्रिभुज में, क घ + से, घ, भुजों से क ख, भुज छोटी होगी इन असमानो में से, क घ, वा क ग लेडालो तो, ख ग, से ख घ वड़ी होगी अर्थात् घ, विन्दु निश्चय, ख, वृत्त के वाहर ही होगा· और, क, वृत्त में और हर एक बिन्दु की यही दशा स्पष्ट होसक्ती है इसलिये ये वृत्त एक दूसरे को केवल, ग, विन्दु पर मिलेंगे अर्थात् वे उस विन्दु पर एक दूसरे को स्पर्श करेंगे ॥

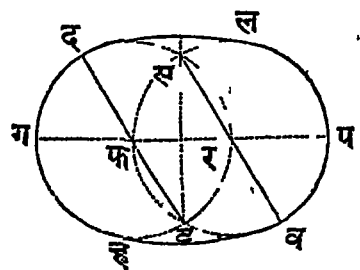
६३ सा० प्र०—दो वृत्तों के क, और, ख, केन्द्रों की दूरी, क ख, क घ, ख घ, त्रिज्याओं के अंतर के समान होवे, तो वे वृत्त एक दूसरे को भीतर से स्पर्श करेंगे ॥

पूर्वसाध्य की रीति से, घ छ, छोटे वृत्त की पालि में एक, ग बिन्दु लेकर, ख ग, क ग, जोड़ दो तो क ख ग,

त्रिभुज में, क ख + ख ग, भुजाओं के योग से, क ग, छोटी होगी। परंतु ख ग = ख घ इस से, क ख + ख ग = क घ; और इसी से, क घ, से, क ग, छोटी होगी अर्थात् ग, बिन्दु घ च, बड़े वृत्त के भीतर ही होगा और हर एक छ घ छोटे वृत्त में के बिन्दु की यही दशा स्पष्ट होसक्ती है इसलिये ये वृत्त केवल एक ही, घ, बिन्दुपर, स्पर्श करंगे ॥

उक्त दोनों साध्यों के प्रयोग ॥

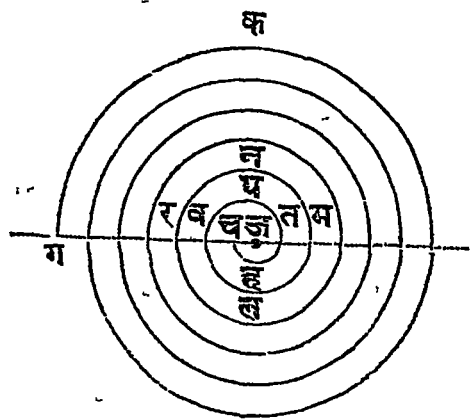
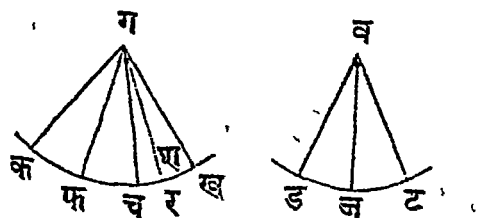
१. लहरिया, वा सर्पगति खींचने का प्रकार,

यथा, क व, को जोड़कर, ख विन्दु से आधी २ करलो और, ल ग, लंब से, क ख, को आधा २ करके लंब, के किसी मनमाने ल, विन्दु को केन्द्र मानि, ल ख, त्रिज्या से, क ख, चाप बनालो तथा, ल ख, जोड़ करउसे बढा दो कि ख प = ख ल होवे अब, प, केन्द्र और, प ख, त्रिज्या से, ख व, चाप बनालो, तो ८२ प्र० से प्रकट है कि, ख विन्दु पर वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करेंगे और इसी से, क ख व, लहरिया एक ही वक्र रेखा में होगा ॥

२. ग व पद० एक अण्डाकृति बनाना चाहिये,

यथा, ग प, दीर्घ व्यास के, र, और फ चिन्हो से तुल्य तीनखण्ड करके उन चिन्हो को केन्द्र मान कर क्रम से, ग द ह, प व ल, वृत्त एक दूसरे को स, और, ट, चिन्हो पर काटते हुए बनालो अब, फ ट, जोड़

कर बढ़ा दो कि वह, ग द ह, बृत्त को, द बिन्दु में काटे, और ट, केन्द्र पर, ट द, त्रिज्या से, द ल, चाप बनाओ तथा इसी रीति से स केन्द्र पर, वह चाप भी बनालो; ये बनाई गई चापे प्रगट है कि एक दूसरे को द, ल, व, और, ह चिन्हों पर स्पर्श करेंगी·

ऐसे ही, ग प, के चार समान भाग करने से और भी अधिक आयत अण्डाकृति बन सक्ती है ॥

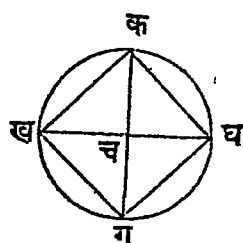
३· ग क ल, एक कुण्डलना वा भौंरी बनानी चाहिये

यथा, ज, कुण्डलना की नाभी और, च ज = ज त, सब से छोटे, च ह त, अर्द्धबृत्त की त्रिज्या मानकर, ज, केन्द्र पर, ज च की त्रिज्या से, च ह त, अर्द्धवृत्त बनाओ फिर च, केन्द्र पर, च त, त्रिज्या से, त प व, अर्द्ध-वृत्त बनाओ, अब, ज, केन्द्र पर, ज व, त्रिज्या से, व ल म, अर्द्धबृत्त बनाओ, इत्यादि चाहो जहां तक बढ़ाते चलेजाओ केवल, ज, और, च, को क्रम से केन्द्र मानने पर ध्यान रक्खो ॥

६४. सा० प्र० — एक, वा तुल्यबृत्तों में, क ग ख, और, ड व ट केन्द्र पर के कोण, निज, क ख, ड ट, चापों के सम्बन्ध में होते है·

यथा, क ख ग, और, ड व ट में, ३ और २ की

निष्पत्ति मानलो और, ∠ क ग ख, को, ग फ, ग च रेखाओं से तुल्य तीन, तथा, ∠ ड व ट, को, व ज, से तुल्य दो भाग करलो तो ∠ क ग फ = ∠ ड व ज, और क ग फ, ड व ज, वृत्त खण्ड एक दूसरे के तुल्य होगे तथा, क फ चाप भी = ड ज, चाप, इत्यादि (१३ प्र०). इसी से ∠ क ग ख, का ∠ ड व ट, से वही सबन्ध होगा जो, क ख, चाप का ड ट, चाप से है ॥

अर्थात् $\frac{\angle \text{क ग ख}}{\angle \text{ड व ट}} = \frac{\text{क ख चाप}}{\text{ड ट चाप}}$ वा, अनुपात के स्वरूप मे, ∠ क ग ख ∠ ड व ट क ख चाप ड व· चाप·* ॥

८५· सा० व०—दिये वृत्त के एक अन्तर्गत वर्ग खेंचा चाहिये,

ख घ, क ग, दो व्यास, एक दूसरे पर लंब डाल कर, क, ख, ग, घ, बिन्दु जोड दो तो क ख ग घ, आकाङ्क्षित, वर्ग होगा, ॥

क्योंकि, क ख च, और, क घ च त्रिभुजों में, ख च = घ च, क च उभयनिष्ठ और ∠ ख च क

---

* कोण भिन्न परिमेय होवे तो ड व ट, छोटे कोण को बड़े कोण पर रक्खो कि ∠ क ग च = ∠ ड व ट, और क च चाप = ड ट चाप, अब पूर्वोक्त साध्य सत्य न होवे तो ∠ क ग ख : ∠ ड व ट . क ख, चाप ' क श, चाप; अब क ख, चाप के कितने ही तुल्य भाग, जो च श, से हर एक छोटा हो मानलो, तो कम से कम, च और श के बीच मे भाग का एक, र, विन्दु तो होगा, इसी से उक्त साध्य से ∠ क ग ख : ∠ क ग र :: क ख, चाप ' क र, चाप, अब इन दो अनुपातों में, अग्रसर

= ∠ घ च क, समकोण होने से इसलिये ये त्रिभुज समान हैं, और, क ख = क घ, इसी रीति से यह भी सिद्ध हो सक्ता है कि क घ = घ ग = ग ख, तथा, ख क घ, अर्द्धवृत्त है (६०प्र०) इस से ∠ ख क घ समकोण है, इसी से, क ख ग घ वर्ग है.

क घ, घ ग आदि चापों को, आधा २ कर भाग चिन्हों को जोड़ देने से वृत्तान्तर्गत अष्टभुज खिंच सक्ता है ॥

अभ्यासार्थ प्रश्न ॥

१ वृत्त की त्रिज्या = च, है कहो उसके अन्तर्गत वर्ग क्षेत्र की भुजा क्या होगी ?

यहां, क च ख, समकोण त्रिभुज से, क ख^2 = ख च^2 + क च^2 = २ च^2; ∴ क ख = च$\sqrt{2}$,

२ वृत्त की त्रिज्या = ४, है कहो अन्तर्गतवर्ग का क्षेत्रफल क्या होगा ? --- --- --- --- --- --- उत्त० ३२.

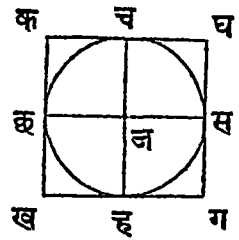
३ अन्तर्गत वर्ग का क्षेत्रफल = १८; वृत्त का व्यास चाहिये --- --- --- --- --- --- --- --- उत्त० ६.

एक ही है ∴ ∠ ड व ट ∶ ∠ क ग र ∷ क श, चाप ∶ कर चाप, यहां क र, चाप से क श, चाप अधिक है और इसी से यह अनुपात सत्य होवे तो, ∠ ड व ट, ∠ क ग र, से बड़ा चाहिये परंतु ऐसा तो नहीं है वरन, वह उस से छोटा है इस से यह आता है कि ∠ क ग ख ∶ ∠ ड व ट ∷ क ख, चाप ∶ क च से बड़ी एक क श चाप, इसी रीति से यह भी सिद्ध होसक्ता है कि अनुपात की पिछली राशि, क च, से छोटी नहीं होसक्ती इस से आता है कि, क च आप ही चौथी राशि होगी, वा, ∠ क ग ख ∶ ∠ ड व ट ∷ क ख, चाप ∶ ड ट चाप ॥

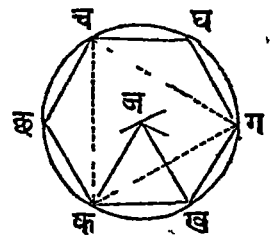
६६. सा० व० — दिये वर्ग के उपरिगतवृत्त बनाना चाहिये, (पिछला क्षेत्र देखो।)

यथा, क ख ग घ, दिया वर्ग है, तो क ग, ख घ, कर्ण एक दूसरे को, च बिन्दु पर काटते हुए खैंचलो, अब ये कर्ण आपस मे समद्विभाजित होजायंगे और च क = च घ = च ग = च ख, इसी से आकांक्षित बहिर्गत वृत्त का, च, केन्द्र होगा॥

६७ सा० व०—दिये वृत्त पर वर्गक्षेत्र बनाना चाहिये,

यथा, छ स, च ह, दो व्यास एक दूसरे पर लंबरूप डालकर, छ, ह, स, और, च, चिन्हों मे होकर क ख, ख ग, ग घ, और घ क वृत्तस्पर्द्धिनी खैंचलो तो, क ख ग घ, आकांक्षित वर्गक्षेत्र होवेगा ॥

तथा, क ख ग घ, दिये वर्ग मे वृत्त खैंचना होवे, तो वह वृत्त, च छ ह स, ही होवेगा ॥

६८ साध्य व०—एक दिये वृत्त मे समषड भुज बनाना चाहिये ॥

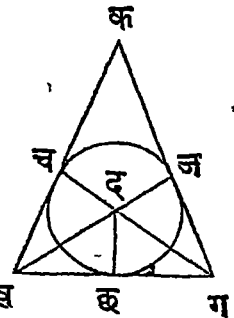
साध्य सिद्ध हुआ मानलो जैसा क ख ग घ, आदि अन्तर्गत षडस्र है, और, क ज, ख ज, त्रिज्या खैंचलो अब ∠ क ज ख = ३६०° का $\frac{१}{६}$ = ६०°, और क ज = ख ज, इस से ∠ ज क ख = ∠ ज ख क, और क्योंकि त्रिभुज के सब कोणों का योग = १८०° होता है इस

सहज ही दृष्टि आता है कि ∠ ज क ख, वा ∠ ज ख

क = ६०°; इसलिये, क ख ज, त्रिभुज समत्रिबाहु है और इसी से बृत्तान्तर्गत समषडस्र की भुज = वृत्त की त्रिज्या॥

अनु० १ — ६०° की जीवा, त्रिज्या के समान होती है॥

अनु० २ — क, ग, च, बिन्दों के जोड़ देने से प्रकट है कि बृत्तान्तर्गत सम त्रिभुज वनजायगा ॥

अनु० ३ — समबहुभुज, तुल्य भुज और तुल्य कोण भी होते हैं यथा ∠ क = ∠ ख इत्यादि ॥

६६. सा० व०—एक दिये त्रिभुज के अन्तर्गतवृत्त बनाना चाहिये, यथा,क ख ग दिया त्रिभुज है, अब, ख ग क, और, ग ख क, कोणों को (२१ प्र०) द, चिन्ह पर मिलती हुई, ग द, ख द, रेखाओं से आधा २ करलो और,द,से, ख ग, पर, छ द, लंब डाललो, तो यही, द छ, अन्तर्गतवृत्त की त्रिज्या होवेगी·

क्योंकि, ख क, और, ग क, पर, द च, द ज, लंब डाललो, तो, ख द छ, और ख द च, त्रिभुज समान होंगे इसी से, द च=द छ इसी रीति से यह भी स्पष्ट होसक्ता है कि, द ज= द छ, इसलिये, द, केन्द्र और द छ, त्रिज्या से बना वृत्त, छ, च, और, ज चिन्हों में होकर जावेगा, और ५६ प्र० से वह इन चिन्हों पर त्रिभुज की भुजों को छुएगा· ॥

अभ्यासार्थ प्रश्न ॥

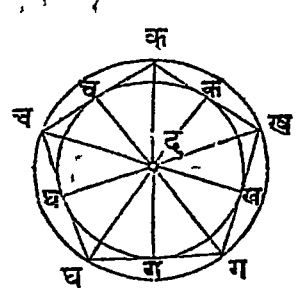
१· अन्तर्गतवृत्त की त्रिज्या द छ=च तथा, ख ग, भुज = का, ख क=गा और, क ग=खा है अब त्रिभुज के क्षेत्रफल का स्वरूप चाहिये ॥

यहां, क ख ग, त्रिभुज तीन त्रिभुजों का अर्थात् ख ग द, ग द क, ख क द, का बना है और ख ग द क्षेत्र = का $\times \frac{त्र}{२}$; ग द क क्षेत्र = खा $\times \frac{त्र}{२}$, ख क द क्षेत्र = गा $\times \frac{त्र}{२}$. ∴ क ख ग क्षेत्र = का $\times \frac{त्र}{२}$, + खा $\times \frac{त्र}{२}$ + गा $\times \frac{त्र}{२}$ = (का + खा + गा) $\frac{त्र}{२}$.

२. एक समकोण त्रिभुज की भुज कोटि क्रम से, ८ और ६ है अंतर्गतवृत्त की त्रिज्या चाहिये ·· · ·· उत्तर २.

३. एक समकोण त्रिभुज के भुज कर्ण क्रम से, १८ और ३० है, अंतर्गतवृत्त की त्रिज्या निश्चित की चाहिये ···उत्तर ६.

१०. सा० प्र० — हरएक सम वहुभुज के वाहिर्गत वा अंतर्गतवृत्त, और वृत्त के अंतर्गत वा बहिर्गत वहुभुज, खिंच सक्ता है ॥

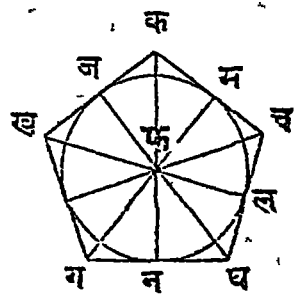
क ख ग घ, आदि एक सम वहुभुज लेलो, ख, ग, और घ, तीन विन्दो मे होकर (५८ प्र०) एक वृत्त बनाओ जिस का, द, केन्द्र और, ख ग, ग घ, जीवाओं के मध्य विंदु ख, ग,′ होवे, और, द ख, द च, को जोडलो, अब, द ग′ घ च, चतुर्भुज, द ग′ पर लौटाया जावे, तो यह ठीकर

द ग′ ग ख, चतुर्भुज को ढक लेगा, और इसी से, द च = द ख, अर्थात् वह वृत्त वहु भुज के, च विंदु पर भी होकर जावेगा,

तथा ठीक २ इसी रीति से यह भी सिद्ध हो जायगा कि ग, घ, और च, चिन्ह मे होकर खिंचा वृत्त, पास के क, विंदु पर भी होकर जावेगा जो वहुभुज का एक कोण है, इत्यादि और भी.

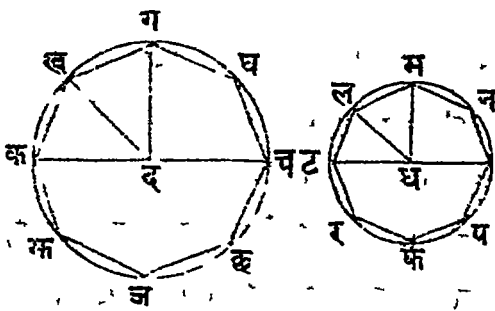
तथा, ख ग, ग घ, घ च आदि सब समान ही जीवा हैं इस से, द ख', द ग', द घ' आदि लंब भी समान होंगे और इसी से, द केन्द्र पर, द ख', त्रिज्या से बना वृत्त उन जीवाओं को, ख', ग', घ' आदि चिन्हों में छुएगा, अर्थात् बहु भुज के अंतर्गत वृत्त बन जायगा.

तथा, ख द ग, ग द घ, आदि सब कोण एक दूसरे के समान और इसी से इन्हों में से हर एक, ३६०° का बहुभुज की भुज संख्या के तुल्यवां अंश होगा इसी से किसी दिये वृत्त में कोई बहुभुज बनाने को उस बहुभुज की भुज संख्या के तुल्य वृत्त की पालि के खण्ड किये चाहियें और फिर इन भाग चिन्हों को जोड़ देने से आकांक्षित बहु भुज बन जावेगा, तथा बहिर्गत बहुभुज बनाना होवे तो उन चिन्हों से वृत्त स्पर्शिनी खेंचनी चाहियें.

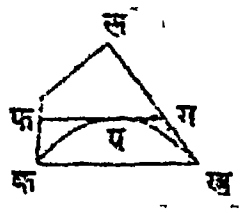
७१. सा० प्र० — सम बहुभुज का क्षेत्रफल, सीमा सूत्र वा (भुजाओं के योग) और अंतर्गतवृत्त की आधी त्रिज्या के घात के तुल्य होता है.

यथा, अन्तर्गतवृत्त की त्रिज्या, फ ज, है, तो, फ ख क, त्रिभुज का क्षेत्रफल = क ख × ½ फ ज, अब, बहुभुज की भुजाओं की संख्या, स, होवे तो उस में, फ ख क, के समान, स त्रिभुज होंगे ∴ बहुभुज का क्षेत्रफल = स × क ख × ½ फ ज, परन्तु स + क ख = सीमासूत्र ∴ बहु भुज = ½ फ ज × सीमासूत्र ॥

७२. सा० प्र०—दो, एकही संख्या की भुजाओं के सम बहु भुजों के सीमासूत्रों में उन क्षेत्रों के वहिर्गत वृत्तों की त्रिज्याओं की निष्पत्ति होती है ॥

तथा उन्हों के क्षेत्रफलों मे त्रिज्याओं के वर्ग की निष्पत्ति होती है ॥

यथा वहिर्गत वृत्तों के, द, और, ध, केन्द्र मानलो तो, ग द ख, म, ध ल त्रि-भुज सजातीय होवेंगे, और ∴ ख ग : ल म : : द ख : ध ल. अब प्रत्येक वहुभुज की भुजसंख्या, स, होवे

तो प्रथम, और दूसरी इस अनुपात की राशीं को, स, से गुण देने से; स × ख ग : स × ल म : : द ख : ध ल, अर्थात् क ख ग घ, आदि वहुभुज के और, ट ल म न, आदि वहुभुज के सीमासूत्रों में वही निष्पत्ति है जो द ख, और, ध ल, त्रिज्याओं मे है इसी रीति से यह भी सिद्ध होसक्ता है कि सीमासूत्रों की निष्पत्ति अन्तर्गत वृत्तों की त्रिज्याओं की निष्पत्ति के तुल्य होती है. ॥

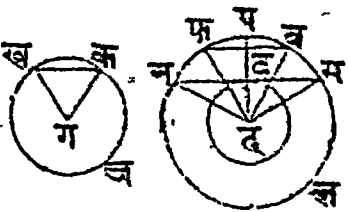
तथा ५५. प्र० से, ट क ख क्षेत्रफल : ध ट ल क्षेत्रफल : : क द^2 : ट ध^2, अथवा, स × क ख ट क्षेत्र : स × ट ल ध क्षेत्र : : क द^2 : ट ध^2. अर्थात् क ख ग घ आदि वहुभुज का क्षेत्रफल जैसा, ट ल म न आदि वहुभुज के क्षेत्रफल को है वैसा ही, क द,^{2} ट ध^2 को है. ॥

७३. सा० प्र० — क प ख, उन्नतवक्रा से, क ख, ज्या छोटी है और क ल ख कुटिल रेखा, उन्नतवक्रा से जिसे वह आवृत्त करती है बड़ी है ॥

प्रथम, क्योंकि, क ख, सरल रेखा है इसी से, क और, ख, के बीच में जितनी रेखा खिंच सकेंगी उन सभों से अर्थात् क प ख से भी वह छोटी होवेगी. ॥

तथा, क प ख, किसी रेखा से, जो उसे आवृत्त करती है छोटी न होगी तो उन सभों में, कोई, क ल ख, रेखा और सभों से छोटी होवेगी. ॥

अब वक्रा को, प, बिन्दु पर छूती और, क ल, ख ल, को, फ और, ग चिन्हों में काटती हुई, फ ग, सीधी रेखा खेंचलो तो क्योंकि, फ ल ग, से फ ग, छोटी है इस से यह आता है कि, क फ ल ग ख, से, क फ ग, ख, अवश्य छोटी होवेगी परंतु पूर्व्व अनुभव से यह सब से छोटी मानी थी सो असंबद्ध है इसलिये वह पूर्व अनुभव मिथ्या है और इसी से क प ख, उन्नतवक्रा से उस की आच्छादक रेखा बड़ी होवेगी ॥

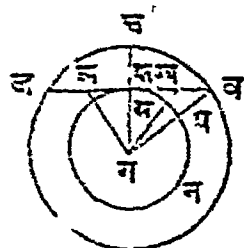
७४. सा० प्र० — वृत्तों की परिधें एक दूसरे प्रति वैसी ही होती है जैसी उन्हो की त्रिज्या,

अर्थात् ग क वृत्त परि. : द फ वृत्त परि. :: ग क . द फ. यह साध्य ठीक न होवे तो, ग क : द फ : : ग क वृत्त परि. . द फ से छोटे वा बड़े वृत्त की परि. ॥

अच्छा पहले छोटा मान लो और सम्भव होवे तो, क ग, : फ द :: ग क वृत्त परि. : द ट वृत्त परि. रखलो अब, द ट, वृत्त को, ट, बिन्दु पर छूती हुई, न म रेखा खींचकर, द ट को, प, तक बढा दो, और इस वृत्त का, प ल, वृत्त पाद लेकर प ल, का आधा, आधे का आधा इत्यादि लेते जाओ कि जब तक, प व, चाप प म से छोटी रह जावे, तथा द प, पर, व फ लंब डाल लो तो प्रकट है कि, फ व, एक अन्तर्गत समबहुभुज की भुजा होवेगी· अब, ग क वृत्त के अन्तर्गत उतनी ही भुजों के बहुभुज की एक भुज, क ख, रेखा लो, तो ०२. प्र० से, क ख, बहुभुज का सीमा सू० : फ व, बहुभुज का सीमा सू० :: ग क : द फ परतु पूर्व अनुभव से ग क : द फ : ग क वृत्त परि. द ट वृत्त परि. . क ख बहु भु० सीमा. : फ व बहु भु० सीमा :: ग क वृत्त परि ट ट वृत्त परि. परन्तु यह अनुपात अशुद्ध है क्योंकि (७२प०)क ग वृत्त परि. से,क ख वहुभुज सीमासू०, छोटा है, और द ट वृत्त परि. से, फ व बहुभु० सीमासू० बड़ा है इसी से; ग क का, द फ प्रति होना जैसी कि ग क वृत्त परि· ट फ वृत्त परि. से छोटी पालि को है यह असम्भव है.

ठीक २ इसी रीति से यह भी सिद्ध हो जायगा कि, द फ का ग क प्रति होना जैसी, ट फ वृत्त परि. ग क वृत्त-परि. से छोटी पालि को है सो भी असंभव ही है वा एक ही बात आपड़ेगी कि ग क, कभी द फ प्रति नहीं होसक्ती जैसी, ग क वृत्त परि· द फ से वड़े वृत्त की पालि को है ॥

अब, इष्ट अनुपात की चौथी राशि द फ वृत्तपरि· से न तो छोटी न बड़ी दो मे से एक भी नहीं हो सक्ती इस से सिद्ध हो

जाने से, यह सिद्ध होजाता है कि ग क : ट फ :: ग क वृत्त परि : ट फ वृत्त परि· ॥

७५. सा॰ प्र॰ — वृत्त का क्षेत्रफल, उस की पालि और आधी त्रिज्या के घात के समान होता है, अर्थात् ग च वृत्त क्षे॰ फ॰ = ग द वृत्त पालि × ½ ग च.

क्योंकि ग च वृत्त परि. × ½ ग च, जिसकी ग च त्रिज्या है उनके क्षेत्रफल के समान न होवे तो यह किसी और छोटे वा बड़े वृत्त के क्षेत्रफल के समान होगा.॥

अच्छा पहले एक छोटे वृत्त के जिसकी त्रिज्या, ग फ है, क्षेत्रफल के तुल्य मानलो, अर्थात् हो सके तो, ग च वृत्त, परि. × ½ ग च = ग फ वृत्त क्षे॰ फ॰ रखलो ॥

अब, फ, बिन्दु पर, जब स्पर्शिनी खेंचकर, ग व जोड़ दो जो, प, बिन्दु पर, ग फ वृत्त को काटे, और, ग फ, वृत्त का, फ न, वृत्त पाद लेकर उसका आधा, आधे का आधा करते जाओ जबलों एक फ म चाप, फ प, से छोटी रह जावे, और फ क = फ ख, ले लो, तो, ग फ वृत्त के बहिर्गत सम बहुभुज की, क ख, एक भुज होगी और ६१ प्र॰ से उस बहु भुज का क्षेत्रफल = उसका सीमा सू॰ × ½ ग फ परन्तु यह सीमासूत्र, ग च वृत्त की पालि से छोटा है, तथा, ग फ भी ग च से छोटी है इसलिये इस बहुभुज का क्षे॰ फ॰ ग च वृत्त परि. × ½ ग च, से छोटा है जिसे पहले, ग फ वृत्त के क्षेत्रफल के तुल्य माना था, अर्थात् बहुभुज का क्षेत्र फ॰ ग फ वृत्त के क्षे॰ फ॰ से छोटा है परन्तु यह प्रत्यक्ष में बड़ा है क्योंकि वृत्त सर्वथा बहुभुज के

अन्तर्गत है इस से ग च वृत्त परि. × $\frac{1}{2}$ ग ज, का ग च वृत्त से छोटे किसी भी वृत्त के समान होना सर्वथा असभव है, और, ज च व वृत्त पर इसी रीति की रचना से सिद्ध हो जावेगा कि यह बड़ा भी नहीं है इसी से साध्य सिद्ध हुआ॥

अनु० — जिस का व्यास एक है उस वृत्त की परिधि = प, रखलो, तो क्योंकि वृत्तों की परिधें उन्हीं की त्रिज्या वा व्यासों की समनिष्पत्तिक होती हैं इसीसे (७४ प्र० की दूसरी आकृ० देखो)॥

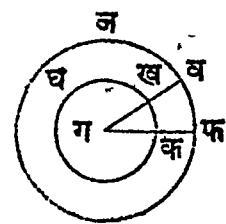
प : क ख ज, परि. : : १ : २ क ग, ∴ क ख ज, परिधि = २ प × क ग, और अब पहले साध्य से, क ख ज क्षे० फ० = क ख ज पालि × $\frac{1}{2}$ क ग = २ प × क ग × $\frac{1}{2}$ क ग = प × क ग^2॥

यहां प एक नियत राशि है इस से यह आता है कि वृत्तों के क्षेत्रफल उन्हीं की त्रिज्याओं के वर्गों के समनिष्पत्तिक होते हैं॥

यहां, किसी भी दिये वृत्त का फल लाने को, प, का अंकात्मक मान निश्चित हुआ चाहिये पर यह वक्ष्यमाण प्रकरण* मे कहा जावेगा॥

७६. सा० प्र० — उक्त दोनों साध्य आगे की रीति से बड़े लाघव से सिद्ध होसक्ते है॥

यथा, क ख घ, फ ज व, कोई दो वृत्त, एक ही, ग, केन्द्र पर लेकर, क ख घ, पालि के, क ख, अत्यन्त सूक्ष्म कितने ही भाग मानलो और, ग ख, ग क, को, व, और फ तक बढ़ालो तो अब, क ख घ पालि, क ख, से, स, गुणी होवे तो, फ व ज, भी फ व, से, स, गुणी ही होगी॥

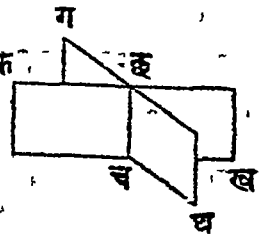
* त्रिकोणमिति में॥

तथा, क ख, अत्यन्त सूक्ष्म है (और इसे चाहे जैसा सूक्ष्म ले सक्ते हैं) इस से यह सरलरेखा गिनी जासक्ती है, और अब, क ग ख; फ ग व, सजातीय त्रिभुज होंगे ॥

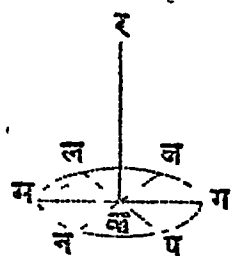
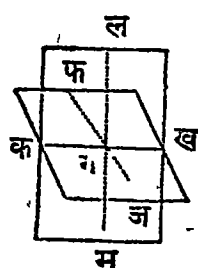
इसी से, क ख : फ व : : ग क : ग फ; अथवा, स × क ख : स × फ व : : ग क : ग फ; परन्तु स × क ख = ग क वृत्त पालि, और स × फ व = ग फ वृत्त पालि ॥

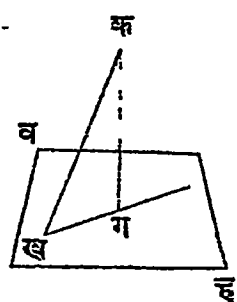
∴ ग क वृत्त पालि : ग फ वृत्त पालि : : ग क : ग फ, इस से ७४ प्र० का साध्य, सिद्ध हुआ, ॥

तथा क ख ग क्षेत्र = क ख × $\frac{१}{२}$ ग क ∴ स × ग क ख क्षेत्र = स × क ख × $\frac{१}{२}$ ग क, अर्थात् ग क वृत्त फल = ग क वृत्त पालि × $\frac{१}{२}$ ग क., इस से ७५. प्र० का साध्य सिद्ध हुआ ॥

स्तर वा धरातल और घन पदार्थों के विषय के साध्य ॥

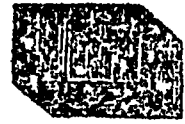
७७. परिभाषा – १ क ख, और ग घ, स्तर, वा रन्दे, च छ, पर एक दूसरे को काटे तो उस रेखा को उभय वा सामान्य खण्ड कहेंगे ॥

२. सरल रेखा, स्तर पर लंब कही जाती है जब कि यह उस स्तर की सब रेखाओं पर जो इस से मिलती हैं लंब रूप होती है ॥

यथा, ल म न, आदि, स्तर पर र क, लंब, तथा, क, लंब पद से उस में खिंची क ल, क म, आदि सरल रेखा मानलो अब र क ल, र क म, आदि सब समकोण होवे तो, र क, लंब होगी ॥

३· दो रन्दो का, क ख, सामान्य खण्ड, और, क ख, पर इन दोनों स्तरों मे, फ ज, ल म, लंब मानलो, तो दोनों रन्दो के झुकाव का, ल ग फ, कोण मापक होगा·

यह, ल ग फ, समकोण होवे तो, क ल ख म, स्तर, क फ ख ज, पर लंब कहा जावेगा·

४· ह व, एक स्तर और उस पर झुकी, क ख रेखा मानलो तथा रन्दे पर क, से, क ग लंब डाल कर ख ग, को जोड दो तो, ह व, रन्दे पर, क ख, का झुकाव, क ख ग कोण होगा·

५· समान्तर स्तर वे होते है जो हर एक ओर को चाहें जहां तक बढाने से भी कभी न मिलें·

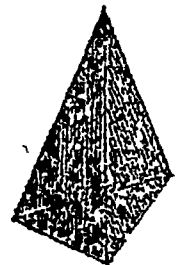
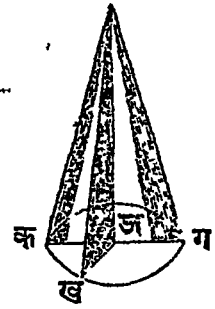
६. जिसके सिरे, समान्तर, एक से सरल क्षेत्र तथा उन सिरों के योग कारक, पार्श्व वा भित्ति, समांतर बाहु होते हैं को छेदित घन कहते हैं. इस छेदित का नाम आधार की

आकृति के अनुसार होता है यथा जिसका आधार त्रिभुज होगा उसे त्रैकोणिक, वा त्रिकोणाकृति छेदित और जिस के आधार में समकोण होगा उसे समकोण छेदित इत्यादि कहेंगे. ॥

७. समान्तर पार्श्व भी एक छेदित ही है जो छह समान्तर बाहु से बनता है जिन्हों में हर एक सामने के दो२ समान्तर और एक से होते हैं और समकोण समान्तर पार्श्व के सब पार्श्व समकोण चतुर्भुज होते हैं ॥

तथा, वर्ग छेदित को जिस में छह पार्श्व समान वर्ग होते हैं, घनक्षेत्र बोलते हैं ॥

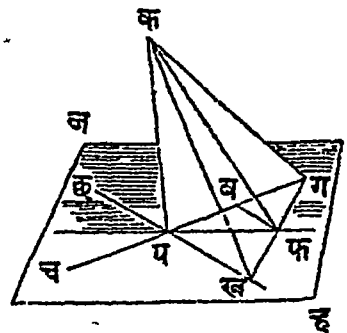
८. नल, वा यष्टिघन भी एक छेदित होता है जिस के सिरे वृत्ताकार होते हैं; यह, दो समान और समान्तर, क ख ग, ड च फ, वृत्तों के और पास, एक, ख च, रेखा के घुमाने से बनता है जो रेखा, ज ह, धुर के जो दोनों केन्द्रों को मिलाता है, सदैव समान्तर रहती है, ॥

क ज ग
ड ह फ
च

९. सूचीघन उसे कहते हैं जिसका आधार कोई भी सरलभुज क्षेत्र हो, और सब पार्श्व सरल त्रिभुज होवें जिन्हों के सिरे एक ही बिन्दु पर आकर मिलते होवें, और वह बिन्दु सूचीघन का सिरा कहाता है. ॥

१०. जिस सूची का आधार, वृत्त होता है वह शंकु वा वृत्तसूची कहलाती है; यह, ख च, रेखा के घुमाने से बनती है, जिस का, च, सिरा जमा होता है और दूसरा सिरा, ख, सदैव आधार की, क ख ग, पालि पर रहता है. सिरे और आधार केन्द्र के योग की, च ज, रेखा, शंकु का धुर कहाती है; यह जात्यशंकु मे आधार पर लंब रूप होती है॥

११. गोल, एक प्रकार का घन होता है जो वक्र धरातल से घेराजाता है और वह धरातल एक नियत बिन्दु से सब ओर समान दूर होता है तथा वह बिन्दु केन्द्र कहाता है; निज व्यास पर अर्द्धवृत के घूमने से गोल बनता है और इसी से वह व्यास गोल का धुर कहाता है॥

१२. सिरे से आधार तक पड़े लंब से, घन का ओच्च कहते है॥

१८. सा० प्र०— क प, सरल रेखा, ज ह, स्तर मे इस के पाद पर एक दूसरे को काटती हुई प ग, प ख, दो रेखाओं पर लंब होवे तो यह, ज ह, स्तर पर भी लंब रूप होगी॥

प, मे होकर ज ह रन्दे मे कोई प फ रेखा तथा ख फ = ग फ बनाती हुई प फ के किसी बिन्दु से ख ग रेखा भी खैंचलो तो, ख ग प, और ख ग क, त्रिभुजों से ५१ प्र० से यह आवेगा प ख^2 + प ग^2 = २ प फ^2 + फ ग^2; क ख^2 + क ग^2 = २ क फ^2 + २ फ ग^2

अब प्रथम समी० को दूसरे में घटाने से क ख, $-$ प ख^2 $+$ क ग^2 $-$ प ग^2 $=$ २ क फ^2 $-$ २ प फ^2, परंतु क प ख, और क प ग समकोण त्रिभुजों से क ख^2 $-$ प ख^2 $=$ क प^2 और क ग$_2$ $-$ प ग^2 $=$ क प^2, $\therefore$ २ क प^2 $=$ २ क फ^2 $-$ २ प फ^2 और $\therefore$ क प^2 $=$ क फ^2 $-$ प फ^2

अथवा, क फ२ $=$ क प^2 $+$ प फ^2 ॥

इसी से, क प फ, समकोण त्रिभुज है और, प फ, पर, क प, लंब है ॥

अनु० १ — स्पष्ट है कि, क दिये विन्दु से ज ह, रंदे पर केवल एक ही लंव खिंच सक्ता है और यह लंव सब से छोटी रेखा होगी जो कि उस विन्दु से स्तर तक खिंचेगी ॥

अनु० २ — ज ह रन्दे पर, क प, लंब और उस रन्दे में, ख ग कोई रेखा, मानलो, अब, लंब के, प, पाद से, ख ग, पर, प फ, लंव खैंचाजावे तो, क प, के किसी विन्दु तक खिंची, क फ, रेखा, ख ग, पर लंब होवेगी ॥

यथा, ख फ $=$ ग फ लेकर, ग प, ख प, ख क, ग क, जोड़ दो तो, ख प फ, फ प ग, त्रिभुज एक से होंगे (१६ प्र०) और इसलिये, प ख $=$ प ग. ॥

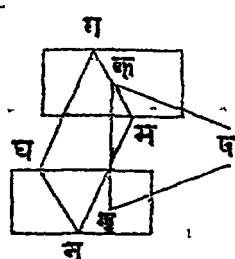
अव, ख प क, और, ग प क त्रिभुज भी एक से होंगे ॥

और इस से क ख $=$ क ग, ऐसे ही, क ख फ, और क ग फ, त्रिभुज भी एक से होंगे (प्र० १८) और इसी से, $\angle$ क फ ख $=$ $\angle$ क फ ग, ॥

अर्थात् ख ग, पर, क फ लंब है ॥

तथा यह भी स्पष्ट है कि, ख ग, क प फ रंदे पर लंब है ॥

अनु० ३ — म ख, म क, म ग, तीनों रेखाओं में से, हर एक पर, क प, लंब होवे तो ये तीनों सरल रेखा एक ही स्तर में होवेंगी ॥

७६. सा० प्र० — क ख, एक ही रेखा पर दो स्तर क, और ख, लंब होवें तो, वे एक दूसरे के समानान्तर भी होवेंगे ॥

क्योंकि संभव होवें तो इन स्तरों को किसी प बिन्दु पर मिलने दो तथा, क प, और ख प, जोड़ दो तो, क्योंकि क ख, रेखा क और ख दोनों स्तरों पर लंब है इस से प क ख, तथा, प ख क, दोनो समकोण है और इसी से, ख प, के क प, समान्तर है जो पूर्व्व अनुभव से विरुद्ध है इसलिये वे स्तरे, प, पर नहीं मिल सक्ते और इसी से समान्तर हैं ॥

अनु० — क, और ख, दो समान्तर स्तर और दो में से एक पर, क ख लंब होवे, तो वह दूसरे पर भी लंब होवेगा ॥

८०. सा० प्र० — क, और ख, दो समान्तर स्तर, किसी तीसरे, ग म न घ, स्तर से कटें तो ग म, घ न, संपात रेखा समान्तर होवेंगी ॥

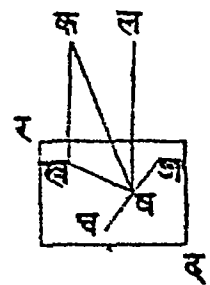
(पिछली आकृति देखो) ॥

क्योंकि समान्तर स्तर कभी नहीं मिल सक्ते इसी से, ग म घ न, रेखा भी नहीं मिलसक्तीं, जो उन स्तरों में हैं परंतु ग म, घ न, एक ही स्तर में हैं इसी से वे समान्तर हैं ॥

अनु०—क, और ख, दो समान्तर स्तरों बीच में की, ग म, घ न, समान्तर रेखा तुल्या होंगी ॥

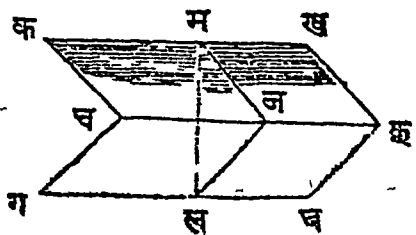
८१. सा० प्र० — क ख, रेखा, र द, रन्दे पर लंब होवे तो, क ख, के समान्तर दूर एक ल व, रेखा उसी स्तर पर लंब होगी ॥

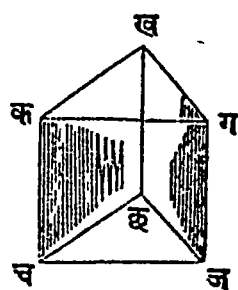
यथा क ख, ल व, समान्तर रेखाओं में, र द, स्तर को, ख व रेखा में काटता हुआ, एक स्तर जाने दो और, र द रन्दे में ख व पर च ज लंब डाललो और, व क, जोड़ लो, ॥

तो ७८ प्र० अनु० २ से, क ख व, स्तर पर च ज, लंब होगा इस से ∠ च व ल, समकोण है, परंतु ∠ ल व ख, भी समकोण है क्योंकि व ख, पर, क ख, लंब है, और ल व, क ख के समान्तर है अब, ल व, दो, व च, और, व ख रेखाओं पर लंब है इसलिये वह, र द, रन्दे पर भी लंब है ॥

अनु० १ — विलोम से, र द, स्तर पर, क ख, और, ल व, लंब होवें तो वे समान्तर भी होवेंगी ॥

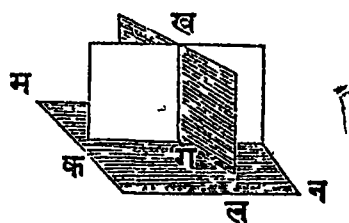
क्योंकि इस साध्य से, ल व रेखा, जो, क ख, के समान्तर है, र द, रन्दे पर लंब है और व बिन्दु से स्तर पर केवल एक ही रेखा खिंच सक्ती है जो कि उस पर लंब होवे ॥

८२. सा० प्र० — च छ, के समान्तर दो क ख, ग घ, रेखा आपस में भी समान्तर होवेंगी ॥

यथा, च छ, पर, ज व ल, स्तर लंब मानलो तो, क्योंकि क ख और ग ल, रेखा, च ज के समान्तर है इस से पूर्व्व साध्य के अनुसार, वे, ज व ल स्तर पर लंब होंगी और इसी से अनु० १ से वे आपस में समान्तर होंगी ॥

८३. सा० प्र० — क ख ग, च छ ज, दो कोणों की, ख क, छ च के और ख ग, छ ज, भुज के समान्तर होवें तो वे कोण समान होवेंगे ॥

यथा, क ख = छ च और ख ग = छ ज, लेकर इस आकृति के सदृश जुदे २ विंदो को जोड़ दो तो क ख छ च, समान्तरवाहु है (३६ प्र०) और इसी से क च = ख छ ऐसे ही ख ग ज छ, भी समान्तरवाहु है इसलिये ग ज = ख छ, अव क्योंकि, क च और, ग ज, दोनों, ख छ के समान्तर और समानान्तर भी है इस से, ८२ प्र० से यह आता है कि ग ज, के क च, समान और समानान्तर भी है इस से, क ग ज च, समान्तर वाहु है, और इसलिये, च ज = क ग ॥

इसी से, क ख ग, और च छ ज, त्रिभुज समान हैं और ∠ क ख ग = ∠ च छ ज ॥

८७. सा० प्र० — ख ग, रेखा, म न, रन्दे पर लंब होवे तो, ख ग मे होकर खिंचा, क ख ग, स्तर भी, म न, पर लंब होगा ॥

यथा, क ख, और, म न, रन्दों का, क ग, संपात है, अब, म न रन्दे मे क ग, पर, ग ल, लंब खैंचलो तो, क्योंकि म न, स्तर पर, ख ग, लव है इस से, ∠ ख ग ल समकोण होगा ॥

परंतु यह कोण, (३ परि०) म न, पर, क ख रन्दे के झुकाव का मापक है इसी से ये रन्दे एक दूसरे पर लव रूप हैं ॥

अनु०— क ख, और, ख ल, दो रन्दे किसी तीसरे, म न, रन्दे पर लंब होवें तो, उन्हों का साधारण संपात, ख ग, भी, म न, पर लंब होगा ॥

क्योंकि, ग, विन्दु से म न, स्तर पर एक लंब डालाजावे तो, यह लंब स्पष्ट है कि, क ख, रन्दे में रहेगा ॥

तथा उसी हेतु से यह, ख ल रन्दे में भी रहेगा ॥

इसी से यह उन दोनों की संपात रेखा होगी ॥

८७. सा० प्र०—कोई क ख ग ल छेदित उस के आधार के समान्तर किसी स्तर से काटाजावे तो वह खण्ड आधार के तुल्य होगा, (९० प्र० की १ और २ आकृ० देखो) ॥

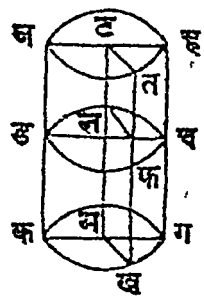
ज ह ट, समान्तर खण्ड मानलो, अब क ख ग और ज ह ट, दो समान्तर रन्दे क ख, ज ट स्तर से कटे हैं इस से ट ज (८० प्र०), क ख, के समान्तर होवेगी ॥

इसी रीति से ज ह भी ख ग के समान्तर होगी ॥

और ऐसे ही सब भुजा जानना, परंतु छेदित के लक्षण से क ट और ख ज, समान्तर हे इसी से, क ख ज ट एक समान्तर बाहु है, ३५ प्र० से, ट ज=क ख; इसी रीति से, ज ह=ख ग. ॥

और ऐसे ही और भी भुजा जानना अर्थात् ज ट ह, और क ख ग, परस्पर तुल्य भुजा है तथा ८३ प्र० से ∠ ज = ∠ ख, ∠ ह=∠ ग, और ऐसे ही और कोण भी. जानना ॥

इस से यह आता है कि, ज ट ह खण्ड क ख ग के तुल्य है ॥

८६. सा० प्र०—क ख ग न, न ल इसके आधार के समान्तर किसी रंदे से काटा जाये तो, ड फ च, आधार के समान एकवृत्त होवेगा. ॥

यथा, क ग ह स, और, ख त ट म, दो रन्दे, ट म, धुर में होकर कढ़े और ड फ च, खण्ड को, फ, च, और, ल चिन्हो में काटते हुए मानलो, तो न ल के लक्षण से, ख फ, और, म ल, समान्तर होवेंगी, और ८० प्र० से, ल फ, म ख, के समान्तर होगी; इसी से, ख फ ल म, समान्तर बाहु होगा, और अब, ल फ = म ख, तथा इसीरीति से यह भी सिद्ध होसक्ता है कि, ल च = म ग, इत्यादि. ॥

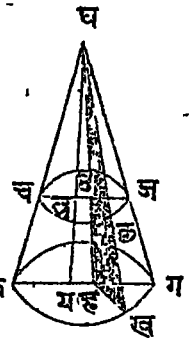
परंतु म ख, क ख ग, वृत्त की त्रिज्या है इस से, ड फ च, क ख ग, के तुल्य वृत्त है. ॥

८७. सा० प्र०—ग च घ क, हर एक सूची में, आधार के समान्तर ज त घ खण्ड आधार के सजातीय होगा और इन दोनों खण्डों में सिरे से उन्हों की दूरियों के वर्ग की निष्पत्ति होवेगी ॥

यथा, ग च घ, आधार के समान्तर, ज त घ, खण्ड मानलो और क ड ख, लंब इन दोनों रंदों पर डालकर, च ख, और, त ड, जोड़ दो तो ८० प्र० से, त ज, और, त घ, ग च, और च घ, के समान्तर होवेगी. और इसलिये ८३ प्र०, से ∠ ज त घ = ∠ ग च घ, इस रीति से ∠ घ = ∠ घ तथा और भी, अर्थात् ज त घ, खण्ड ग च घ, के समकोण है. ॥

और ट ज, ह ग के समान्तर होगी. और इस हेतु से, घ ह ख, और, घ द छ, त्रिभुज सजातीय है ॥

तथा घ ह ग, और घ द ज, भी सजातीय हैं इसी से घ ह : घ द :: ह ख . द छ. ॥

तथा, घ ह : घ द :: ग ह : ज ट, ∴ ह ख : द छ :: ग ह : ज द. परंतु, क ख वृत्त की त्रिज्या ह ख = ग ह, इसलिये, छ द = ज द तथा, च छ ज, पालि की और भी हर एक बिन्दु की ऐसी ही सिद्धि होगी इस से वह वृत्तक्षेत्र है ॥

तथा, घ ह य, और, घ द व, सजातीय त्रिभुजों से, घ य : घ व :: घ ह : घ ट वा :: ग ह : ज द ∴ घ $य^2$: घ $व^2$ :: ग $ह^2$: ज $द^2$ परतु ७५ प्र० से क ख ग, वृत्तफल : च ज ज, वृत्तफल : ग $ह^2$: ज $द^2$ ∴ क ख ग वृत्तफल . व छ च वृत्तफल : घ $य^2$: घ $व^2$ ॥

८६. सा० प्र०—गोल का रन्दे से हुआ हर एक खण्ड वृत्तक्षेत्र होता है यथा, क घ ग ख, गोल का, जिस का, च, केन्द्र है, क ज ग, खण्ड मानलो, और, च, से, क ज ग, रन्दे पर, च छ, लंब डाल लो, तो ख च छ घ, गोल का धुर होवेगा. अब, च क घ ग, और, च क घ, धुर में हो कर, कढ़े दो स्तर मानलो तो, क छ च,

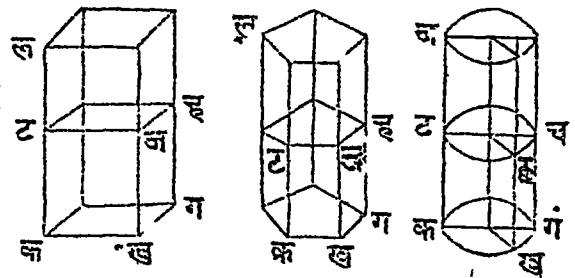
और, ज छ च, समकोण त्रिभुजों मे च क = च ज, क्योंकि ये गोल की त्रिज्या है और, च छ उभयनिष्ठ है, इसलिये, छ क = छ ज, ऐसा ही रीति से यह भी सिद्ध होगा कि, छ, से क ज ग, खण्ड की पालि तक, और कोई भी खिंची रेखा छ क, के तुल्य होगी

इसलिये, क ज ग, एक वृत्त है जिसकी, छ क त्रिज्या है ॥

अनु०— केन्द्र में हो कर कटे गोल के खण्ड की, च क, त्रिज्या होगी जो, क छ, से प्रत्यक्ष में बड़ी है, इसी से, क ज ग, गोल का छोटा वृत्त, और गोल के केन्द्र में होकर कटा खण्ड उस का बड़ा वृत्त कहाता है ॥

तथा गोल के सब बड़े वृत्त प्रत्यक्ष मे एक दूसरे के तुल्य होते हैं ॥

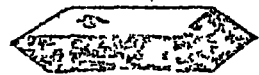
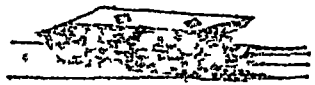
९०. सा० प्र०—तुल्य आधार गोष्ठ के, छेदित, तथा, नल, एक दूसरे के समान होते है ॥

यथा, इस आकृति मे न ल और छेदितो को एक ही धरातल पर खड़े मानलों, और उन्हीं के आधारों के समान्तर एक स्तर से इन्हें कटने दो जिस से, ट ज ह और, ट छ च, खण्ड हो जावे, तो, ये सब खण्ड एक दूसरे के तुल्य होगे, क्योंकि ८५ प्र० से क्रम से ये अपने २ आधारो के तुल्य हैं पर, आधार सब तुल्य दिये हुए है ॥

इसी रीति से यह भी सिद्ध हो जायगा कि और भी समान्तर क्षेत्र समान होंगे ॥

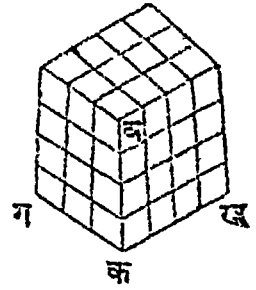
अब ये छेदित और, न ल, अत्यन्त सूक्ष्म पतले और समान इन स्तरों से बने माने वा अनुभव किये जासक्ते हैं ॥

और औच्च के तुल्य होने से हर एक इन स्थूल पदार्थों में स्तरों की तुल्य ही संख्या होगी, इसी से यह आता है कि ये छेदित और न ल समान होंगे ॥

व्याख्या वा दृष्टान्त और प्रयोग ॥

१. ताशों को एक नर्म मेज पर छेदित की आकृति में रक्खा है उस में पार्श्वों का चाहे जो झुकाव हो पर छेदित का घन फल सदा एक ही होगा ॥

यहां एक ही आधार-औच्च के पतले पत्तों (ताशों) से छेदित बना है ॥

इस साध्य के साधन की रीति, केवेलेरिअस नाम साहिब ने निकाली थी, और "अनन्तों का गणित" इस नाम से प्रसिद्ध है, पर हर्षाकृत में यूकलिड की कही हुई निःशेषकरण नाम रीति के समान यह ठीक नहीं है किन्तु वह निःशेषकरण की रीति अति विस्तार के हेतु ऐसे लघु ग्रंथों की पहुंच से बाहर है और विशेष कर के इस से कि वह पूर्व गणित की रीति है जो लाघव और शुद्धता के विषय में और सबों से अति उत्तम और प्रशंसनीय है ॥

७. समान कोण स्थूल पदार्थ के घनफल लाने का प्रकार ॥

यथा. क ख, लंबाई में चार, क ग, चौडाई में तीन, और, क घ, उंचाई में भी चार, एकाई मानलो तो, क घ, संपूर्ण उंचाई मे ४ टुकडे होगे जिन्हों में हर एक, एक एकाई के दल का होगा, परन्तु हर एक टुकडे में से प्रत्यक्ष है कि १२ एकाई

वा घन कट सके है, इसलिये संपूर्ण समकोण स्थूल पदार्थ मे ४ गुणित १२ वा ४८ घन एकाई होंगी, इस से यह जाना जाता है कि समकोण स्थूल पदार्थों मे घन एकाई या घन फल, लंबाई चौडाई और दल, वा, वेध को आपस में गुण देने से, वा एक ही बात है कि आधार, के क्षेत्रफल को लंब रूप उंचाई से गुण देने मे आजाता है ॥

यथा क ख ग, आधार का फ़ल = ३ × ४, और, क ख घ ग, घनफल = ३ × ४ × ४, ॥

तथा ये रेखात्मक मान इंच रूप होवेंगे तो, घन इंचों मे और फुट होवेंगे तो घन फुटो मे घनफल आवेगा इत्यादि जानना ॥

१. उदा० — ६ फुट लंबी ३ चौड़ी और २ फुट मोटी पत्थर की सिल्ली का क्या घनफल होगा? .. .. — उ० ३६ घ. फुट ॥

२. उदा० — ७ फु० लंबी ७ इंच चौड़ी ६ इंच मोटी, सिल्ली में कितने घन इंच हो सकेंगे ? उ० १००८,

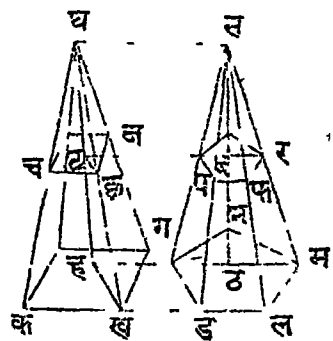
३. छेदित और नलेां के घनफल लाने की रीति क्योंकि समान आधार औच्य के सब छेदित और नल, तुल्य होते हैं इस से जाना जाता है कि क ख ग ल, त्रिपस छेदित तथा, क ग ज, नल, का घनफल, क ख ग' ल, समान कोण छेदित के घनफल के समान होगा, और इसी से उन्हों में से हर एक का घनफल, आधार क्षेत्र और लंब रूप औच्य के घात के तुल्य होगा ॥

१· उदा० — एक छेदित के आधार का क्षेत्रफल २४ वर्ग फुट, और उंचाई ३ फुट है, उसका घनफल क्या होगा? ॥

यहां आधार क्षे० फ० = २४· ∴ घन. फ० = २४ ×३ = ७२ घ० फु० ॥

२· उदा० — एक छेदित का आधार समकोण त्रिभुज है जिस की, भुजकोटि क्रम से ६ और ४ इंच है तथा औच्य ५ फुट है घ०फ० कहो · · ····· ∴ उ० १२० घ० इं० ॥

६१ सा० प्र० — तुल्य आधार औच्य के सूची और शंकु एक दूसरे के समान होते हैं ॥

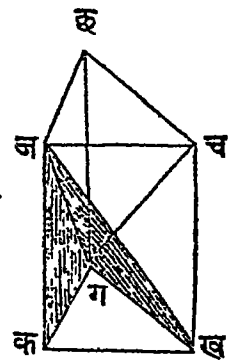
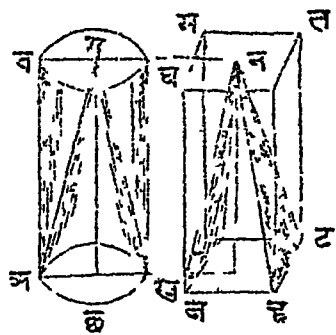
सूची आदि को एक ही स्तर पर स्थित और एक ही रन्दे से कटे मानलो जो आधार के समान्तर होवे और जिस से, च छ ज, और, प फ र, खण्ड होजावें; अब, च छ ज, क ख ग, दोनों रन्दो पर, घ ट ह, लञ, तथा, प फ र, ड ल म, दोनो रन्दो पर, स व ठ, लंब डाल लो तो, घ ह = स ठ, घ ट, लव

= स व, परन्तु ८७ और ८८ प्र० से, क ख ग क्षे० फ० : च छ ज, क्षे० फ० :: घ ह^2 : घ ट^2, तथा ड ल म, क्षे० फ० : प फ र, क्षे० फ० : स ठ^2 : स व^2 ∴ क ख ग क्षे० फ० : च छ ज, फ० :: ड ल म क्षे० फ० : प फ र, क्षे० फ०.

परन्तु पक्षधर्म से क ख ग क्षेत्र = ड ल म क्षेत्र, ∴ च छ ज क्षेत्र = प फ र क्षेत्र इसी रीति से यह भी सिद्ध हो सक्ता है कि और भी हर एक समान्तर खण्ड समान होगा इसी से सूची, जो इन समान और समान्तर खण्डों को बनी है एक दूसरी के समान होंगी ९० (प्र० देखो) ॥

९२. सा० प्र०—हर एक त्रिकोण सूची तुल्य आधार औच्य के छेदित का तृतीयांश होती है ॥

यथा क ख ग, और, च छ ज, छेदित के दोनों सिरे हैं

अब, ख ग ज, और ज, ग च, में होकर रन्दे डाल दो तो, इस से छेदित के तीन तुल्य खण्ड होजावेंगे. ॥

इसी से ९१ प्र० से. क ख ज, और, ख च ज, तुल्य आधारों पर स्थित और एक ही, औच्य की, क ख ज ग, और, ख च ज ग, सूची समान होंगी और इसी रीति से, क ख ग और ज छ च तुल्य आधारों पर स्थित, और एक ही औच्य की, क ख ज ग, और ज छ च ग, सूची भी समान होंगी इसी से क ख ग ज, सूची क ख ग छ, छेदित का तृतीयांश है. ॥

१ अनु० — हर एक, ज ह ट न' सूची तुल्य आधार औच्च्य के, ज ह ट म, छेदित की तिहाई होती है, क्योंकि आधार, चतुर्भुज होवे तो उसके बीच से दो त्रिभुज होसक्ते हैं और इसी से उस छेदित के भी दो त्रिकोण रूप छेदित, तथा उस सूची की दो सूची होसक्ती है जो हर एक अपने २ छेदित की तिहाई होगी इसलिये दोनो खण्ड सूची मिलकर अर्थात् समग्र सूची, दोनो खण्ड छेदितों के मिल कर अर्थात् समग्र छेदित की तिहाई होगी ॥

२ अनु० — हर एक, क छ ख ग, शंकु क ख घ च, न ल, वा ज ह ट म, छेदित का तृतीयांश होगा जो कि उन्हों के आधार औच्च्य समान होवेंगे ॥

क्योंकि, क ख घ च, न ल, ज ह ट म, छेदित के तुल्य सिद्ध हो चुका है, तथा, क ख ग, शंकु भी, ज ह ट न, सूची के तुल्य सिद्ध हो आया है, परंतु यह सूची, ज ह ट म, छेदित की तिहाई है इसी से क ख ग, शंकु भी, ज ह ट म, छेदित के तृतीयांश के समान होवेगा ॥

प्रयोग और उदाहरण ॥

शंकु वा सूची के घनफल लाने का प्रकार ॥

आधार के क्षेत्रफल को लंबरूप उंचाई से गुण दो और इस घात की तिहाई घनफल होवेगा ॥

१. उदा० — एक सूची का आधार वर्गक्षेत्र है जिस की भुज ३ फुट और उसकी घात्मक ऊंचाई ८ फुट है. घनफल चाहिये. ॥

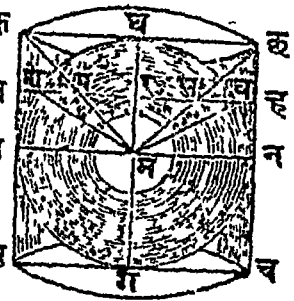
यहां आधार = $३^२$ = ९; ∴ घन फ० = $\frac{९ \times ८}{३}$ = २४ घ० फु० ॥

२. उदा० — एक शंकु का आधार ६ वर्गफुट और औच्च ७ फुट है, घ० फ० कहो. . . . . उ० १४ घ० फुट. ॥

३. उदा० — एक वर्ग सूची का लंब १२ और आधार भुज १ $\frac{३}{४}$ फुट है घ० फ० क्या होगा ? . . . . उत्त० १२. २५ घ० फु०

९३. सा० प्र० — हर एक गोल उपरिगत नल की दो तिहाई होता है. ॥

यथा, ग न घ ल, गोल की घ ग, धुरी, उसके उपरिगत, ख च छ क, न ल, और, म, केन्द्र तक, क छ म, शंकु है ॥

अब, तीनों घनों का, ख च, आधार के समान्तर और न ल, गोल और शंकु को क्रम से, ज, श, और प, बिन्दुओं में काटता हुआ, ज ह कोई खण्ड मानकर इन चिन्हों को, म, केन्द्र से जोड़ दो, और, ख च, के समान्तर, न ल, खैंचलो. तो क घ म और प र म, सजातीय त्रिभुजों से क घ : घ म : : पर : र म; परन्तु घ म = क घ ∴ र म = प र, ॥

तथा, श र म, समकोण त्रिभुज से. श $म^२$ = श $र^२$ + र $म^२$; परंतु श म = ज र, और, र म = प र, ∴ ज $र^२$ = श $र^२$ + प $र^२$ अव, ५७ प्र० अनु० से जिस वृत्त की त्रिज्या ज है वह,

न ^{2} ग, से सूचित हो सक्ता है; इसलिये पिछले समी० के दोनों पक्षों को, प, से गुणने से, प. न $र^2$ = प. श $र^2$ + प द $र^2$; अर्थात् न ह वृत्त का फल = श व वृत्त फल + प स वृत्त फल, अर्थात् नल का खण्ड अपने सदृश, गोल और शंकु के खण्डों के योग के समान है ॥

और हर एक समान्तर खण्ड जो कि बन सकेगा ऐसे ही सिद्ध होगा इस से माना है कि ल ह, अर्द्ध नल का घनफल, ल घ न अर्द्ध गोल और क ह न, शंकु के घनफलों के तुल्य है; परंतु क ह स शंकु ल ह, अर्द्ध नल की तिहाई के तुल्य है; ∴ ल ह, अर्द्ध नल = ल घ न, अर्द्ध गोल + $\frac{1}{3}$ ल ह, अर्द्ध नल ∴ $\frac{2}{3}$ अर्द्ध नल, ल ह = अर्द्ध गोल ल घ न; और दूने करने से, $\frac{2}{3}$ ख च ह क, नल = ल घ न ग, गोल ॥

रेखा गणितीय अभ्यासप्रश्न ॥

८४. रेखागणित की प्रथम प्रक्रिया-सिखाने की सब से अच्छी रीति यह है कि जानी बूझी वा ठहराई हुई बातों से क्रम २ बढ़ते जावें जब तक पूर्व अज्ञात वा साध्य इष्ट की सिद्धि हो जावे यही बहुधा केवल रीति अब तक इस ग्रन्थ में ली गई है और इसी को संघटना कहते है ॥

यह रीति यद्यपि पूर्व सिद्ध वा निरूपित बातों को पढ़ाने समझाने के लिये बड़ी अद्भुत है तो भी इस में इष्ट, साधन के लिये पूर्व सिद्ध ज्ञान वा उपाय की अपेक्षा होती है इसी से यह कुछ बड़े काम की नहीं है ॥

तथा रेखा गणितीय प्रक्रिया के निरूपण करने की उपपत्ति वा साधननाम एक और भी रीति है ॥

इस मे साध्य इष्ट को पूर्व ही मानकर उसी के अनुसार अनेक फल निरूपित किये जाते है जो क्रम से ठीक २ उसी अनुभव से आजाते हैं और अन्त में उस से कोई ऐसी बात सिद्ध होजाती है जो पहले ही से निश्चय हो रही है, इस के हो जाने से अनुमान होता है कि पूर्व का वह अनुभव भी सत्य है और अब उपपत्ति वा साधन प्रक्रिया भी पूरी होगई ॥

तथा इस साधन प्रक्रिया में क्रम से अंत से आदि तक विलोम कर आवें जिस से कि पूर्व्व माने इष्ट तक आजावें तो वह संघटना प्रकार कहावेगा ॥

इस से जाना जायगा कि यहां उपपत्ति वा साधन की संघटना ठीक २ विलोमरूप है ॥

रेखा गणितीय साधन, निर्म्माण करने का एक प्रकार है इसी से प्रश्नों के करने की राह निकालने के लिये विशेष करके लिया जाता है परंतु इस साधन की रीति से क्रिया करने में साधारण सूच नहीं बनसक्ते, और प्रश्न के स्वभाव ही से अनेक प्रकार की विशेष युक्तियां सूचित हो जाती है उन्हीं ही के हेतु इष्ट सिद्धि होजाती है ॥

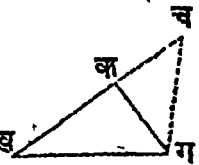
कहीं रेखा, और रेखाओं के समान्तर वा उन्हीं पर दिये कोण से झुकी हुई बनाने को होती है; कहीं दिये कोण वा रेखा आधी २ करने को होती है कहीं कोई दिये बिन्दों में होकर वृत्त खैंचने को होते है इत्यादि इस साधन के विषय हैं ॥

इन्हीं मे से कोई २ युक्तियां दिखाने के लिये आगे प्रश्न लिखे जाते है परंतु विद्यार्थी को ४५ वें साध्य तक पढ़कर व॰ १ और ७२ वे साध्य तक पढ़कर व॰ २ के प्रश्नों का प्रारंभ किया चाहिये ॥

व० — १ साध्यवस्तूपपाद्य ॥

१. आधार, आधार पर का एक कोण तथा शेष भुजाओं का योग दिया है त्रिभुज बनाओ ॥

उपपत्ति वा साधन — क ख ग, आकांक्षित त्रिभुज मानलो जिस मे ख ग = दिया आधार, ∠ ख = आधार पर का दिया कोण और, ख च = क ख, क ग भुजों का योग और, ख

ग च, जोड़ दो तो, क ग = क च, और क ग च समद्विबाहु त्रिभुज होगा, ॥

इसी से ∠ क ग च = ∠ क च ग, इस से यह बनाने की रीति सिद्ध हुई ॥

यथा, ख ग = दिया आधार लेकर ∠ ख = आधार पर का दिया कोण बनाती हुई, ख च, खैंचलो; और, ख च = दो भुजाओं का योग लेकर, ग च जोड़ दो, तथा ग, से, ख च, को, क में मिलती और ∠क ग च = ∠ क च ग, बनाती हुई ग क, रेखा खैंचलो, तो अब, क ख ग, आकांक्षित त्रिभुज बनजावेगा, ॥

२. आधार, आधार पर का एक कोण, और लंब दिया है त्रिभुज बनाओ ॥

३. एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाना चाहिये जिसका लंब, आधार, के समान है ॥

४. एक समद्विबाहु त्रिभुज बनाना चाहिये जिसका आधार और सिरे का कोण दिया है ॥

५ एक विन्दु निश्चित किया चाहिये जो एक सीधी रेखा से दी लंबरूप दूरी पर होवे और उसी रेखा में एक दिये विन्दु से भी दी दूरी पर होवे ॥

६. दी रेखा में एक विन्दु निश्चित किया चाहिये जो दो दिये विन्दों से सम दूरी पर होवे ॥

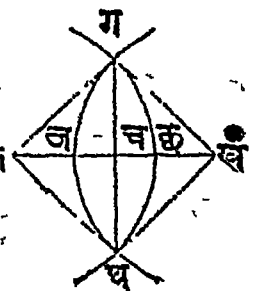
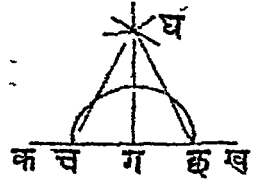
७. एक समकोण त्रिभुज बनाओ जिसका कर्ण, भुज से दूना हो और सिद्ध करो कि भुज के सन्मुख का कोण ३०० का होगा ॥

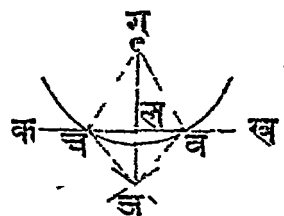
८ एक वर्गक्षेत्र बनाना चाहिये जब कि उसका कर्ण दिया है ॥

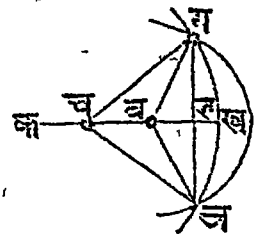
९. एक आयत बनाना चाहिये जब कि उसका कर्ण और एक भुजा दी है ॥

१०. सिरे से आधार तक खिंची रेखा से एक त्रिभुज के सम दो भाग किये चाहियें ॥

११. क ख, दी सरलरेखा के सम दो भाग किये चाहियें ॥

संघटना क, को केन्द्र मानकर, आधी, क ख से बड़ी, किसी त्रिज्या से, घ छ ग चाप, तथा, ख, को केन्द्र मानकर कंपास के उसी विस्तार से, घ ज ग, चाप, पहिली को ग, और घ, विन्दो में काटती हुई बनालो और ग घ को जोड़दो, जो, च चिन्ह पर से, क ख को आधा २ कारदेवेगी, अब इसे प्रमाण देकर सिद्ध किया चाहिये ॥

१२. क ख, रेखा में एक दिये, ग, विन्दु से, ग घ, लंब डाला चाहिये ग, केन्द्र और कोई सी भी ग च, त्रिज्या से, च छ, अर्द्ध वृत्त, तथा, च, और, छ, केन्द्रो से, और, ग च, व ग छ, से, अधिक, कंपास के कोई भी विस्तार से घ, पर एक दूसरी को काटती हुई चापें खेंचलो और, ग घ, जोड़ दो तो यही, क ख, पर लंब होगा, अब इसे सप्रमाण सिद्ध किया चाहिये ॥

१३. ख क ग, दिये कोण के सम दो भाग किये चाहियें क, केन्द्र से, कंपास के कोई से भी बिस्तार से, च ल, चाप बनालो, च, और ल, केन्द्रों से और कंपास के उसी विस्तार से, व, पर एक दूसरी को काटती हुई चापें को खेंचकर, क व, को जोड़ दो तो इस से ∠ ख क ग, के दो सम भाग हो जावेंगे, इसे प्रमाण की रीति से सिद्ध किया चाहिये॥

१४. ग, दिये विन्दु से, क ख, रेखा पर, ग ल लंब डाली चाहिये. ग, केन्द्र से, क ख, को च, और, व, विन्दों में काटती हुई एक चाप खेंचो. तथा, च, और व, को केन्द्र मानकर, च व, के आधे से बड़ा कोई त्रिज्या से, एक दूसरी को ज, को काटती हुई दो चापें खेंचकर, ग ज को जोड़ दो तो यही, क ख, पर लंब होवेगा ॥

रेखा के सिरे के निकट लंब पड़े तो, क ख, मे किसी च विन्दु को केन्द्र मानकर, च ग त्रिज्या से, ग ज, चाप,

तथा, उसी रेखा में किसी और, व बिन्दु को केन्द्र मानकर, व ग, त्रिज्या से, पहली को, ग, और, ज, बिन्दु में काटती हुई दूसरी चाप खैंचकर, क ख, को, ल बिन्दु में काटती हुई ग ज रेखा कर

दो, तो, क ख, पर, ग ल लंब होगा, इसे सिद्ध करो ॥

१५ दिये बिन्दु से दी रेखा के साथ ४५° का कोण बनावे ऐसी एक रेखा खैंचो ॥

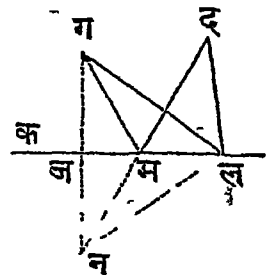
१६. त्रिभुज के आधार में एक ऐसा बिन्दु निश्चित करो कि एक भुज के समान्तर उस से दूसरी भुज तक खिंची रेखा एक दी रेखा के समान होवे ॥

१७. दिये बिन्दु से एक रेखा खैंचो कि जिसका, दो दी समान्तर रेखाओं के बीच का भाग एक दी रेखा के तुल्य होवे॥

१८. एक समकोण के तीन समान भाग किये चाहियें ॥

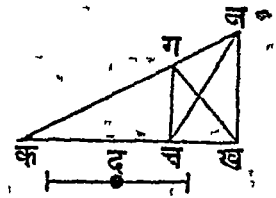
१९. एक बिन्दु में होकर खिंची रेखा से, एक समान्तर बाहु के दो तुल्य भाग करो ॥

२०. एक दिये समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के अन्तर्गत एक वर्गक्षेत्र बनाओ और सिद्ध करो कि यह वर्ग उस त्रिभुज का आधा होवेगा. ॥

२१. क ल, रेखा में, म, एक ऐसा बिन्दु निश्चित किया चाहिये कि, ग, और, द, दो दिये बिन्दो से खिंची, ग म, द म, रेखा, ∠ग म क = ∠द म ल, बनावे, ॥

साधन. बिन्दु निश्चित हुआ मानलो, और, क म, पर ग ज, लंब डाल कर, द म, को बढा दो कि वह वर्द्धित, ग ज,

से, न, पर जामिले, तो ८. प्र० से ∠ न म ज = ∠ द म ल, पर, ∠ ग म ज. = ∠ द म ल, ∴ ∠ न म ज = ∠ ग म ज, अब न म ज, और, ग म ज, त्रिभुजों में, म ज उभयनिष्ठ है, ∠ ग म ज = ∠ न म ज और समकोण ∠ ग ज म = ∠ न ज म, इसलिये १० प्र० से ये त्रिभुज समान है और, न ज = ग ज, इस से यह निर्म्माण रीति सिद्ध हुई॥

यथा क ल, पर, ग ज न, लंब डालकर, ग ज = ज न, लेलो, और, क ल को, म, मे काटती हुई न द, रेखा जोड़ दो तो आकांक्षित, बिन्दु, म, होवेगा॥

२२. क ख ग, त्रिभुज दिया है इस के समान, क च ज त्रिभुज बनाओ जिसका आधार क च, द, दी रेखा के समान होवे. बनाने का, प्रकार, क च = द, लेकर, ग च, जोड़ दो और ख, से ग च के समान्तर, क ग, वर्द्धित को, ज, पर काटती हुई, ख ज, रेखा खैंचकर, च ज, जोड़दो तो, क च ज, त्रिभुज, क ख ग, के समान होगा, अब इसे प्रमाण से सिद्ध करो॥

२३. आधार, आधार पर का एक कोण, और लंब दिया है समान्तरबाहु बनाना चाहिये॥

२४. दिये समद्विबाहु त्रिभुज से एक चतुर्भुज काटो जिसका आधार त्रिभुज के आधार के समान होवे, और शेष तीन भुज एक दूसरी के सब समान होवे॥

प्रमेयोपपाद्य॥

२५. समान्तरबाहु के कर्ण एक दूसरे के सम दो भाग करते है॥

२६. वर्गक्षेत्र के कर्ण उसे चार एक से त्रिभुजों में बांटते हैं ॥

२७. हर एक चतुर्भुज के चारों कोणों का योग चार समकोण के समान होता है ॥

२८. समद्विबाहु त्रिभुज के आधार के सिरों से भुजों पर पड़े दोनों लंब समान होंगे ॥

२९. दिये कोण के सम दो भाग कारक कोई रेखा खेंची जावे तो उस रेखा का हर एक बिन्दु, कोण को बनाती हुई दोनों रेखाओं से समान ही दूर रहेगा ॥

३०. समान्तरबाहु के कर्ण की समद्विभाजक हर एक रेखा समान्तरबाहु को भी आधा २ करती है ॥

३१ दी रेखा के किसी लंब से सम दो भाग होवें तो उस लंब का हर एक बिन्दु रेखा के दोनों सिरों से तुल्य दूर होगा ॥

३२. दो समान्तर रेखाओं से तुल्य दूरी पर एक बिन्दु लेकर उस में होकर समान्तर रेखाओं तक कोई दो रेखा खेंची जावे तो इस रीति से बने दोनो त्रिभुज एक से होवेंगे ॥

३३ एक दूसरी के समान्तर दो रेखाओं में से एक पर लंब डाला जावे तो वह दूसरी पर भी लंब होगा ॥

३४. समान्तरबाहु के सन्मुख कोणों से कर्ण पर पड़े लंब समान होते हैं ॥

३५. समद्विबाहु त्रिभुज की सिरे की ओर बढ़ी एक भुज से बने बहिर्गत कोण की सम दो भाग कारक रेखा आधार के समान्तर होती है ॥

३६. लम्ब रूप से एक दूसरी को सम दो भाग कारक रेखाओं के सिरों के योग की रेखा समबाहु चतुर्भुज बनावेगी ॥

३७. समबाहु चतुर्भुज का फल, कर्णों के घात का आधा होता है ॥

३८. समान्तरसूत्र, वा, सलाका, क ख, और, ग घ, दो सलाका, च छ, और ज झ, दो पीतल के तुल्य टुकड़ों से जुड़ी हैं जिन्हों में, च, छ, ज, और. झ, पर कीलें लगी हैं ॥

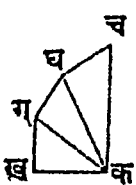
क च झ ख
ग छ ज घ

ऐसी कि, च छ = झ ज, अब सिद्ध करो कि, क ख, सदैव, ग घ, के समान्तर रहेगी उन्हों में चाहो सो दूरी होवे ॥

३६. सिद्ध करो कि ७५ प्रश्न में, ग म, और, द म, रेखाओं का योग, ग, और, द, बिन्दों से क ल, तक जो रेखा खिंच सकेंगी उन सबों से छोटा होवेगा ॥

व० २— वस्तुपपाद्य ॥

४०. चार दो रेखाओं के वर्ग योग के तुल्य एक वर्गक्षेत्र बनाया चाहिये ॥

निर्म्माण की रीति — क ख, और ख ग, को भुज कोटि मानकर, क ख ग, समकोण त्रिभुज बनाओ, क ग (पूर्वनिश्चितकर्ण) और ग घ, को भुजकोटि मानकर दूसरा समकोण त्रिभुज इत्यादि बनाते जाओ तो, क च, का वर्ग, क ख, ख ग, ग घ और घ च, के वर्गयोग के समान होगा, इसे सिद्ध करो ॥

च
घ
ग
ख क

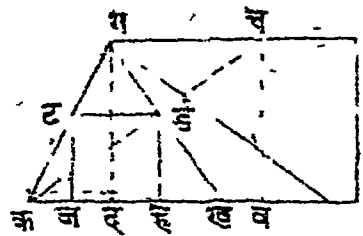
४१. एक समत्रिबाहु त्रिभुज में दूसरा समत्रिबाहु त्रिभुज बनाओ और सिद्ध करो कि अन्तर्गत त्रिभुज पहले त्रिभुज का चतुर्थांश है ॥

४२. दिये कोण मे एक दूसरी पर झुकी दो रेखाओं के बीच में एक दिये बिंदु में हो कर एक रेखा ऐसी खैंचो जिसके उस बिंदु से दो सम भाग होजावें ॥

४३ दियें त्रिभुज में एक बिन्दु निश्चित करो जिसकी लंबरूप दूरी दोनों भुजों से दो हैं ॥

४४ दी त्रिज्या से एक वृत्त बनाओ जो दो दिये बिंदों में होकर जावें ॥

४५. क ख ग, दिये त्रिभुज में एक, जे ट ड ह वर्ग बनाओ ॥

साधन — अर्थ सिद्ध हुआ मानलो, अब, ग द, और, ग च, क ख, पर लंब और उस के समान्तर खैंचकर, क ह, को जोड़कर बढ़ा दो कि वह, ग च, से, च, पर जा मिले तो, क ट ड, और, क ग द, त्रिभुज सजातीय हैं इस से $\frac{\text{कग}}{\text{कट}} = \frac{\text{गच}}{\text{टह}}$ ॥

परंतु क ट ज, और क ग द, त्रिभुज भी सजातीय हैं और $\frac{\text{कग}}{\text{कट}} = \frac{\text{गद}}{\text{टज}}$ $\therefore \frac{\text{गच}}{\text{टह}} = \frac{\text{गद}}{\text{टज}}$, परंतु ट ड = ट ज क्योंकि वर्ग की भुजा है ॥

∴ ग च = ग द, इस से यह बनाने की रीति सिद्ध हुई ॥

यथा, क ख, पर, ग द, लंब और उस के ग च समान्तर खैंचकर ग च = ग द लेलो और ख ग, को, ड, मे काटती हुई क च रेखा जोड़ दो तो, ड, वर्ग का एक कोण होगा ॥

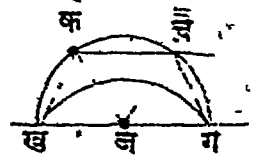
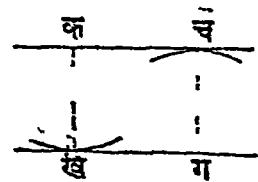
४६. एक वृत्त पर स्पर्शिनी डालो जो एक दी रेखा के समान्तर होवे ॥

४७· एक दिये वृत्त में ऐसी जीवा खैंचो जो एक दी रेखा के तुल्य और दूसरी दी रेखा के समांतर होवे ॥

४८· एक वृत्त बनाओ जो दिये बिन्दु से होकर जावे और एक दी रेखा को दिये बिंदु में छुए ॥

४६· दी त्रिज्या से एक वृत्त बनाओ जिसका एक दी रेखा में तो केन्द्र होवे और जो दूसरी दी रेखा को छुए ॥

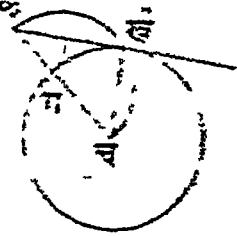
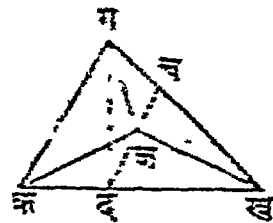
५०: ख ग; रेखा के समान्तर; क, दिये बिंदु में होकर: एक रेखा खैंचो·

ख ग, में कोई, च, बिंदु को केन्द्र मान कर च क, दूरी की त्रिज्या से ख क ग, अर्द्ध वृत्त बनाओ और ख क, दूरी को लेकर उसे च ग, चाप पर; ग; से, च, तक देखा दो लगाओ, अब, क और च; मे होकर, क च रेखा खैंच दो, यही ख ग रेखा के समान्तर होवेगी ॥

अथवा प्रकारान्तर से; यथा, क; दिये बिन्दु को केन्द्र मानकर (परीक्षा से कंपास का ऐसा विस्तार लेकर) एक चाप बनाओ कि वह दी रेखा को, ख बिंदु में स्पर्श करे, और उसी बिस्तार से ग, केन्द्र

पर, च, चाप बनाकर, उसे ठीक छूती हुई, क, से, क च; रेखा खैंचलो तो यही; ख ग; के समान्तर होगी, प्रमाण से सिद्ध करो ॥

५१: एक वृत्त बनाओ; जो एक दिये वृत्त को दिये बिंदु से छुए और एक दिये बिंदु में होकर जावे ॥

५२. आधार, सिरे का कोण और लंब दिया है त्रिभुज बनाओ ॥

५३. क, एक दिये बिंदु में होकर एक दिये वृत्त को, क ख स्पर्शिनी खैंचो ॥

निर्म्माण प्रकार — क और, च, दिये वृत्त के केन्द्र को जोड़कर, क च, को, ग, से सम दो भाग करलो, और, ग, केन्द्र पर, ग च, वा, ग क, त्रिज्या से; दिये वृत्त को, ख, में काटता हुआ, क ख च; अर्द्धवृत्त खैंचकर क ख; जोड़ दो, अब, यह रेखा दिये वृत्त को ख, बिंदु पर स्पर्श करेगी, इसे प्रमाण से सिद्ध करो ॥

५४. क ख ग, त्रिभुज के, तीनों कोणों से त्रिभुज के भीतर एक, ज चिन्ह तक खिंची; क ज, ख ज, और, ग ज, रेखाओं से तीन समान भाग करो ॥

निर्म्माण प्रकार — क ख, की तिहाई, क द; लेकर, पास की, क ग, भुज के समान्तर, द च खैंचलो, और, द च, के ज, से दो समभाग करके, क ज, ख ज, और, ग ज, जोड़ दो अब, सिद्ध करो कि इन रेखाओं से त्रिभुज के तुल्य तीन भाग हो जायंगे ॥

५५. किसी भुज में एक दिये बिंदु से खिंची रेखा से एक दिये त्रिभुज के दो सम भाग करो ॥

५६. किसी एक कोण से खिंची रेखा से एक दिये चतुर्भुज के दो सम भाग करो ॥

५७. एक दिये वृत्त पाद के अन्तर्गत एक वृत्त बनाओ ॥ प्रमेयोपपादो ॥

५८. रेखागणित के ४७ चित्र की एक सीधी रीति बताओ जब कि भुज कोटि दोनो तुल्य हैं ॥

५९ समत्रिबाहु त्रिभुज के लंब का वर्ग, भुज के वर्ग से पौनो होता है ॥

६०. वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दो तक खिंची रेखा, दिये उस वर्ग के आधे के तुल्य एक वर्ग बनावेगी ॥

६१. त्रिभुज के आधार के मध्य में पड़ी रेखा, आधार के समान्तर सब रेखाओं के सम दो भाग करेगी ॥

६२. समान्तरबाहु मे कर्णों का वर्गयोग, भुजों के वर्गयोग के तुल्य होता है ॥

६३. समत्रिबाहु त्रिभुज के भीतर किसी बिंदु से भुजाओं पर पड़े लंबों का योग, उस त्रिभुज के लंब के तुल्य होता है ॥

६४. किसी चतुर्भुज की भुजाओं के सम दो भाग करके भाग बिंदु जोड़ दिये जावें तो इस प्रकार से बना क्षेत्र समान्तरबाहु होवेगा ॥

६५. त्रिभुज की दो भुजों का योग, सिरे से आधार के मध्य तक खिंची दूनी रेखा से बड़ा होगा ॥

६६. दो समान्तर जीवाओ से कटे बीच के धनुष समान होते हैं ॥

६७. दो वृत्तों के, जो आपस में कटते हैं, एक संपात बिंदु से होकर वृत्तों तक खिंची एक रेखा के सिरो से दूसरे संपात बिंदु तक खिंची रेखा सदैव एक ही वा तुल्य कोण बनावेगी ॥

६८ त्रिभुज की एक भुज के मध्य से आधार के समान्तर खिंची रेखा सन्मुख की भुजा के सम दो भाग करेगी, और आधार के आधे के तुल्य होवेगी ॥

६९. समबाहु त्रिभुज के अन्तर्गत वृत्त की त्रिज्या; बहिर्गतवृत्त की त्रिज्या की आधी होती है ॥

वस्तूपपाद्य ॥

७०. आधार, सिरे का कोण और दो भुजाओं का योग दिया है त्रिभुज बनाना चाहिये ॥

साधन = क ख ग, आकांक्षित त्रिभुज मानलो (१ प्र० की आकृ० देखो) जिस में ख ग = दिया आधार, ∠ ख क ग = सिरे का दिया कोण और, ख च = ख क, और, क ग, भुजों का योग, अत, ग च, जोड़ दो तो,क ग च, समद्विबाहु त्रिभुज होगा ॥

और इसलिये ∠ ख क ग = २ ∠ ख च ग, इस से यह बनाने की रीति सिद्ध होती है; ख ग दिये आधार, पर एक ऐसा वृत्त बनाओ जिस में ∠ ख च ग = दिये सिरे के कोण का आधा, (६॥ साध्य प्रयो० प्र० १) ॥

ख, केन्द्र पर, दो भुजों के योग, ख च, की त्रिज्या से, वृत्त को, च, पर काटती हुई एक चाप बनाकर, ग च, और ख च, जोड़ दो, और ∠ क ग च = ∠ क च ग, बनाती हुई, क ग, रेखा करलो तो, क ख ग आकांक्षित त्रिभुज होवेगा, ॥

७१ भुजों का योग और आधार पर के कोण दिये हैं त्रिभुज बनाओ ॥

७२. एक सरल रेखा खेंचो जो दो दिये वृत्तों को स्पर्श करे, ॥

७३ एक वृत्त बनाओ जो एक दी रेखा को दिये विन्दु में और एक दिये वृत्त को भी छुए

७४ क ख, एक दी रेखा पर कितने ही इष्ट भुज का एक समबहुभुज बनाना चाहिये ॥

यथा इष्टभुज की संख्या आठ मानलो अर्थात् अष्टभुज बनाना है ॥

साधन — इष्ट सिद्ध और बहिर्गत वृत्त का, ग, केन्द्र मानकर, क ग, ख ग, जोड़दो तो, क ग ख, समद्विबाहु त्रिभुज होगा, और ∠ क = ∠ ख, इस से, २ ∠ क + ∠ ग = १८०°, और ∴ ∠ क = $\frac{१}{२}$ (१८०° − ∠ ग) परन्तु ∠ ग = ३६०° का $\frac{१}{८}$ = ४५° ∴ ∠ क = $\frac{१}{२}$ (१८०° − ४५°) = ६७ $\frac{१}{२}$° इस से यह बनाने की रीति सिद्ध हुई॥

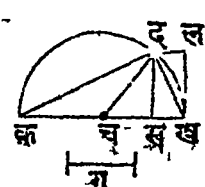
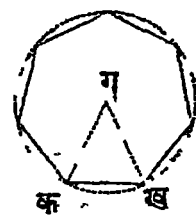
ग
क ख

यथा — ∠ क = ∠ ख = ६७$\frac{१}{२}$°, बनाते हुई, क ग, ख ग, रेखा खैंचकर, ग, केन्द्र और, ग क, वा ग ख, त्रिज्या से एक वृत्त बनाओ, और उस में, क ख, के तुल्य सब जीवा खैंचलो तो आकांक्षित बहुभुज बन जायगा ॥

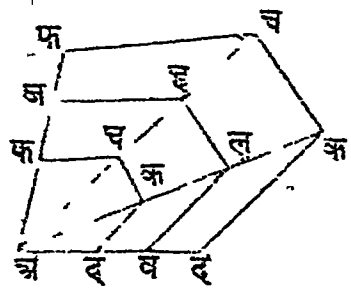
७५ दिये वृत्त में कितनी ही मानी भुजों का एक समबहुभुज बनाओ ॥

७६ क ख, एक दी रेखा के, क स, ख स, दो ऐसे भाग करो कि उन्हों का घात, ग, दी रेखा के वर्ग के तुल्य होवे ॥

निर्म्माण प्रकार — क ख, को, च, से आधा करके, च, केन्द्र पर, च क, वा, च ख, त्रिज्या से, क द ख, अर्द्धवृत्त बनालो, और क ख, पर, ख ल, लंब डालकर, उसे, ग, के तुल्य करलो, अब, वृत्त को, द, में काटती

द ल
क च स ख
ग

हुई, क ख, के समान्तर, ट ल खैंचकर, ट, से, क ख, पर, ट स लंब डाललो, तो, क स. ख स, = ग,[२] अब इसे सिद्ध किया चाहिये ॥

७७. अब ल ह ज. एक दिये सरलभुजक्षेत्रों के सजातीय, अ ट क च फ. एक सरलभुजक्षेत्र बनाओ ॥

अ ल, और, अ ह को जोड कर आवश्यक होवे तो बढा दो, और आकांक्षित क्षेत्र की भुज के तुल्य अ ट, लेकर; व ल, के समान्तर ट क, और ल ह, के समान्तर, च, तथा, ह व के समान्तर, च फ, खैंचलो, तो, अ ट क च फ, अ व ल ह ज, के समान्तर होगा क्योंकि, ३१ प्र० से ∠ अ क ट = ∠ अ ल व, और ∠ अ क < = ∠ अ ल ह, इसलिये इन समानों को जोडने से ∠ ट क ∠ = ∠ व ल ह, तथा ठीक २ इसी रीति से यह भी सिद्ध हो जायगा कि ∠ क च फ = ∠ ल ह ज, इत्यादि इस से क्षेत्र तुल्य कोण हुए, तथा सजातीय त्रिभुजों से, अ क . अ ल : : ट क व ल, और अ क : अ ल : : क च : ल ह: इसी रीति से यह भी सिद्ध होसक्ता है कि क च, ल ह च फ · ह ज इत्यादि ॥

इस से तुल्यकोणों के पार्श्व की भुजा समनिष्पत्तिक है और इसलिये क्षेत्र सजातीय हैं ॥

तथा इन सजातीय क्षेत्रों मे इन्हो की सदृश भुजों के घर्गो की निष्पत्ति है ॥

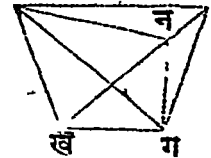
यथा, $\frac{\text{अ च फ चे॰}}{\text{अ ज ह चे॰}} = \frac{\text{अ च}^2}{\text{अ ह}^2} = \frac{}{\text{अ ल}^2} = \frac{\text{अ ट}^2}{\text{अ व}^2}$;

$\therefore \frac{\text{अ च फ चे॰}}{\text{अ द}^2} = \frac{\text{अ ह ज चे॰}}{\text{अ व}^2}$ इसी रीति से $\frac{\text{अ क च चे॰}}{\text{अ ट}^2} = \frac{\text{अ ल ह चे॰}}{\text{अ व}^2}$, और $\frac{\text{अ ट क चे॰}}{\text{अ ट}^2} = \frac{\text{अ व ल चे॰}}{\text{अ व}^2}$ इन तुल्यों को आपस में जोड़ देने से $\frac{\text{अ द क फ चे॰}}{\text{अ द}^2} = \frac{\text{अ व ल ज चे॰}}{\text{अ व}^2}$

$\therefore \frac{\text{अ द क फ चे॰}}{\text{अ व ल ज चे॰}} = \frac{\text{अ द}^2}{\text{अ व}^2}$ ॥

प्रमेयोपपाद्य ॥

४८. एक ही, ख ग, आधार पर, क ख ग, म ख ग, तुल्य त्रिभुज एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य में होंगे ॥

क्योंकि, ख ग, के समान्तर, क म, न होवे तो, उसके समान्तर, क न, खैंच कर, न ग, जोड़ दो, अब, ४१ प्र॰ से, △ क ख ग = △ न ख ग, परन्तु इष्ट से △ क ख ग = △ म ख ग ∴ △ न ख ग = △ म ख ग, यह असंगत है इस से, ख ग, के, क न, समान्तर नहीं है ऐसे ही यह भी सिद्ध होसक्ता है कि क म के बिना और कोई रेखा, ख ग, के समान्तर नहीं होसक्ती ॥

४९. ज ल ग, त्रिभुज मे, (२३ प्र॰ आकृ॰) जो $\text{ल}^2 = \text{ग ज}^2 + \text{ग ल}^2$ होवे तो, ∠ ल ग ज, समकोण होगा ॥

यथा, ल ग, पर, ग च लंब डालकर, ग च = ग ज, लेलो और च ल, जोड़ दो तो, ४७ प्र० से च ल^2 = ग ल^2 + ग च^2 वा ग ज,^{2} परंतु, ज ल^2 = ग ज^2 + ग ल^2 ∴ च ल,^{2} = ज ल^2 वा च ल = ज ल, इस से प्र० १८. ज ग ल, च ग ल, त्रिभुज समान हैं, और ∠ ल ग ज = ∠ ल ग च = समकोण. ॥

८०. क ख ग, और न च ल, त्रिभुजों की सदृश भुजा, समनिष्पत्तिक होवें तो वे त्रिभुज तुल्य कोण होंगे (७४. प्र० की, आकृति. देखो) ॥

यथा क र = न च, लेकर, ख ग, के समान्तर, र म खैंचलो तो, क ख : क ग : क र, वा न च : क म, परंतु इष्ट से, क ख : क ग : : न च : न ल, ∴ न ल = क म, और ऐसे ही च ल = र म, अर्थात् △ च ल न, △ र म क, के समान है और ∴ △ क ख ग, के तुल्य कोण है ॥

रेखागणित में बीज क्रिया के प्रयोग ॥

८१. उक्त स्थलों में अनेक प्रश्न ऐसे कहे हैं जिन्हों से रेखागणित में बीज क्रिया पाई जाती है ॥

अब इस भाग में बीजात्मक राशों के धन ऋण मान से ही रेखागणित का क्रियाकलाप, बीज क्रिया से क्रिया जावेगा ॥

यथा, क+ख−ग, इस स्वरूप को जिस मे हर एक वर्ण कुछ रेखात्मक संख्या है निर्माण करने को मानलो, ॥

अब. य य' रेखा मे एक

य' प' अ प ग य

नियत विंदु-अ लेकर, अ ग=क, ग य. = ख, और, य प = ग,

मापलो तो, अ प = क+ख – ग, यहां यह जानना चाहिये कि धन, राशि अ, नियत बिंदु से दाहिनी ओर को मापी जावें तो ऋण राशि उलटी ओर को मापी जावेगी और, क + ख, से, ग, अधिक होवे तो, प्रसिद्ध है कि आकांक्षित बिंदु, अ की बाईं ओर होवेगा ॥

उस प्रकार में य प′ = ग रखलो तो, क + ख – ग, = ऋण राशि, इस से जाना जाता है कि दाहिनी ओर को मापी गई राशि धन, वा + मानी जावें तो बाईं ओर को मापी गई ऋण वा – मानी जावेंगी इस से दिशा का कुछ नियम नहीं केवल यही है कि जिस ओर को, धन राशि मापें उसको विरुद्ध दिशा को ऋण राशि मापनी चाहियें, परन्तु परंपरा से धन राशि दाहिनी ओर ऋण राशि बाईं ओर को बहुधा मापी जाती है ॥

इसी रीति से टी रेखा से ऊपर को धन गिनें तो उस से नीचे को ऋण दूरी गिनी जायगी ॥

१. यथा – एक पथिक, प्रति घंटे, स, मील की गति से, य, से, अ, की ओर को चला, कहो, घ, घंटे के पीछे, वह, अ, से, कितनी दूर रहेगा जब, य अ = म, मील ‥ ‥ ?

आकांक्षित स्थान, प, मानलो तो, चलित दूरी, वा, य प = म घ, और इसी से, अ प = म – स घ म = २०, स = ४, और, घ = ३ होवे तो अ प = २० – ४ × ३ = ८, इस फल से जाना जाता है कि वह अभी, अ, तक नहीं पहुंचा, और इसी से अ प, धन राशि गिनी जावेगी ॥

अब, क = २०, ग = ४, और घ = ६. मानलो, तो;
अ प = २० − ४ × ६ = − ४, यहां शंका होती है कि
इस ऋण फल से क्या आशय है, परन्तु प्रश्न के नियम से स्पष्ट
है कि वह दक्षिण, अ, से अगाड़ी बढ़ गया है अर्थात् वह
४ मील अ, से आगे बढ़ गया है और इसी से, अ, से बाईं ओर
४ मील पड़े, प,' पर, प बिन्दु लेना चाहिये ॥ भाग

२. अ क = क, एक दी रेखा, है ऐसा, अ प,
निश्चित किया चाहिये कि अ प² = क प,

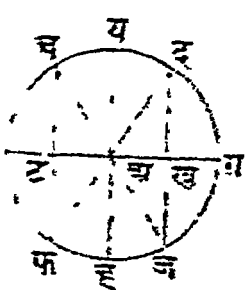
य = अ प रखलो, तो प क =
क − य, इस से यह समी० सिद्ध हुआ, प' अ प क

य² = क − य, और ∴ य = ½ (± √(४ क + १) − १)

क = ६ मानो तो, य = २ वा − ३. इसी से यहां दो
बिन्दु हैं जिन्हीं से प्रश्न का नियम पूरा होता है अर्थात् अ प
= २, और अ प' = ३. क्योंकि इनके ये विनियोग मिलते हैं,
यथा अ प² = क प अर्थात् २² = ६ − २, और अ
प'² = प' क अर्थात् ३² = ६ + ३ ॥

३. एक वृत्त की त्रिज्या, अ द, त है; क ग, व्यास पर
पड़े द ख = ल, लंब की स्थिति बताओ,

य = अ ख, रखलो, तो अ द ख, समकोण त्रिभुज से अ
ख² = अ द² − ख द² अर्थात्, य²
= त² − ल², ∴ य = ± √(त² − ल²)
अब, त = ५ और ल = ३ रखलो, तो
य = ± √(२५ − ९) = ± ४. इस फल से
आशा है कि, अ, की दाहिनी और बाईं

द य द
क अ ख ग
फ ह न

दोनो ओर टिया लंब पड़ सक्ता है अट = अ ख = ४ लेवे और, ट ख, च ट, लंब डालें तो, अ ख द, और, अ ट च त्रिभुज समान होगे, पर इतना ही केवल अन्तर होगा, कि पहिले का आधार दाहिनी ओर दूसरे का बाईं ओर को मापा जायगा ॥

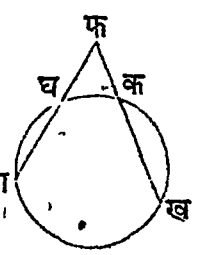
४. उक्त प्रश्न में, अ द = च, और, अ ख = ग, दिये हैं, ख द को निश्चित करो, ॥

य = ख द, रखलो तो, $य^{2} = च \quad ग^{2}$, $\therefore$ य = $\pm\sqrt{च^{2} - ग^{2}}$ अब, च = १० और ग = ६ रखलो तो, य $= \pm\sqrt{१०० - ३६} = \pm ८$,

यहां द ख, बढाया जावे कि वह वृत्त को ज, पर काटे तो, य, का ख द, धन और, ख ज, ऋण मान होगा ॥

इस प्रकार से, क ग, रेखा से ऊपर को धन, और नीचे को ऋण मान मापे जाते है ॥

५. फ, दिये विन्दु से, क ख ग घ, दिये वृत्त को, घ, और ग, विन्दों में काटती हुई एक ऐसी, फ घ ग, रेखा खैंचो कि उसका, घ ग भाग, एक दी रेखा के समान होवे.

वृत्त को, क और, ख, मे काटती हुई, फ क ख, रेखा खैंचकर फ ख = क, फ क = ख, घ ग = ग, और, फ घ = य, रखलो तो, फ ग, = य + ग. और ६५. प्र० से, फ ग. फ घ = फ ख. फ क, अर्थात्, (य + ग) य = क ख. इस समी० को करने से, य $= \frac{1}{2}\left(- ग \pm \sqrt{ग^{2} + ४ क ख}\right)$ अब, क = ८, ख = ३, और ग

= २ रखलो तो य = ४ वा — ६. यहां अनुभव के अनुसार धनमान ४ है और ऋणमान के लिये. फ, ग = ६ है क्योंकि, फ ग = य मानो तो, एक समी० बन जावेगा जिस से य = ६ धनमान आवेगा ॥

वार्तिक

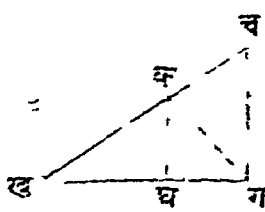
रेखागणित की अपेक्षा बीज क्रिया अधिक साधारण है इसी से साधन प्रक्रिया में बहुधा ऐसे फल आते है कि नियमों का नियत डौल विना बदले रेखागणित की रीति से ठीक २ विनियोग नहीं मिलसक्ता, तथापि प्रकृत समी० में, य के स्थान मे — य रखने से ऋणात्मक फल का आशय बहुधा निश्चित हो जाता है, क्योंकि इस क्रिया से विरुद्ध समी० के वे ही मान आवेगे केवल चिन्ह विपरीत होंगे ॥

यथा पूर्व समी० में य के स्थान मे — य रखने से (—य + ग) × — य, वा (य — ग) य = क. ख ∴ य = ६ वा — ४. यह समी० प्रत्यक्ष से भी ठीक २ फ घ. फ ग = फ ख. फ क, इस के सदृश है जिस में, फ ग के स्थान में य है ॥

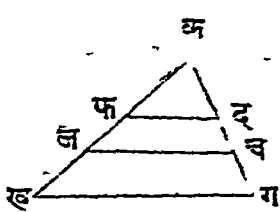
६. ग ख और ग च लंबरूप रेखाओं के मध्य में, क, बिन्दु दिया है अब, ख एक ऐसा बिन्दु निश्चित करो कि, क, में होकर खिंची, ख क च, रेखा, ख ग च क्षेत्र = म^{2} काटे.

ख ग, पर, क घ, लंब डालकर, ग घ = क, क घ = ग, और ख ग = य, रखलो, तो, ख घ = य — क और ख घ : क घ : : ख ग ग च, ∴ य — क : ग ∴ य . ग च = $\frac{ग\ य}{य - क}$, परंतु ख ग · ग च = २ म^{2} ∴ य × $\frac{य\ ग}{य - क}$ = २ म^{2}

$$\therefore य = \frac{म^2}{ग} \pm \frac{म}{ग}\sqrt{म^2 - २कग}$$

यहां, य, के दोनों मान, सदा धन और यथार्थ है जब कि २ क ग से, $म^2$ बड़ा है परन्तु $म^2$ से २ क ग बड़ा होवे तो प्रश्न असंभव होगा क्योंकि वहां ऋण राशि का मूल लेने को होगा। और क, बिन्दु ग च रेखा में लिया जावे तो ग घ वा क = ० और $य = \frac{२म^2}{ग}$ अब क = ५, ग = २ और $म^2$ = ३६ रखलो तो $य = \frac{३६}{२} \pm \frac{६}{२}\sqrt{३६ - २ \times ५ \times २}$ = ३० वा ६.

७. ज क च, दिये त्रिभुज में फ ट एक दो रेखा की स्थिति निश्चित करो, जो ज च आधार के समान्तर होवे॥

क घ = क, ज क = ख, फ ट = म और, ज फ = य, मानलो तो फ क = ख − य, और, ज क च, फ क ट, सजातीय त्रिभुजों से ज च : ज क :: फ ट : फ क, वा क : ख :: म : ख − य,

∴ म. ख = क (ख − य),

$\therefore य = \frac{ख(क - म)}{क}$ अब, ख = ८, क = ४, और म = २, रखलो, तो, य = ४. यह फल धन है इस से जाना जाता है कि, ज च, की ऊपर की ओर को, अनुभव के अनुसार ज फ मापी गई है॥

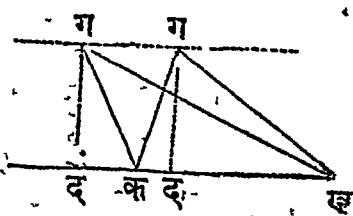
तथा, ख = १२, क = ३, और म = ५, मानो, तो, य = − ८, अब, यह फल ऋण है इस से सूचित होता है, कि जिस मार्ग मे पहले य, मापा गया था, उसकी विरुद्ध दिशा मे, उसे अब मापना चाहिये, ॥

इसलिये, ज ख = ८ लेकर, ज च, के समान्तर, ख ग खैंचलो तो दी रेखा की इस प्रकार में, ख ग स्थिति होवेगी. क्योंकि पूर्व अनुपात में य को − य में परिवर्तने से क : ख : : म : ख + य, आवेगा, और यह अनुपात क ज च, और क ख ग, त्रिभुजों से मिलता है॥

८. ४५ वें प्रश्न में, पृ० १२३ त्रिभुज का आधार और लंब दिया है अन्तर्गत वर्ग की भुजा चाहिये, ॥

क ख = ख, ग द = ल, और वर्ग की भुजा, ज ह = य, रखलो, तो, क ग ख, और, ट ग ड, सजातीय त्रिभुजों से, क ख : ग द : : ट ड : ग द − ट ज, वा, ख : ल : : य : ल − य, ∴ ल य = ख. (ल − य), ∴ य = $\frac{ख \cdot ल}{ख + ल}$ ॥

९. आधार, लंब, तथा, अन्य दो भुजाओं का सम्बंध दिया है त्रिभुज निश्चित करो, ॥

क ख ग, आकांक्षित त्रिभुज, और, ग द, दिया लंब मानलो, और, क ख, = ५, ग द = २, ख ग = २ क ग, और, क द = य, रखलो, तो, ख द = ५ − य, और, क द ग, ख द ग, समकोण त्रिभुजो से, क ग^{2}

ग ग
द क द ख

$=$ य^2 + ४; और ख ग^2 = (५ − य)^2 + ४; परं
ख ग = २ क ग, वा, ख ग^2 = ४ क ग^2 ∴ (५ − य)^2
+ ४ = ४ (य^2 + ४). इस से, य = १ वा − ४
आता है.॥

यहां प्रश्न के नियमों के पूरे करने वाले दो जुदे २ त्रिभुज हैं अर्थात् क ख ग, और क ख ग′ जहां, क द = १ और क द′ = ४ $\frac{1}{3}$ ॥

१०. एक समकोण त्रिभुज का आधार = ६, तथा दूसरे कोटि और कर्ण का योग, = २८; कोटि चाहिये, .. उत्त० ८

११. समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण १८ है भुज चाहिये .. .. उत्त० १२. ७२.

१२. एक वृत्त पाद की त्रिज्या. त, है उस के अन्तर्गत वर्ग की भुज चाहिये. .. .., उत्त० $\sqrt{\frac{त}{२}}$ ।

१३. वृत्त खण्ड के अन्तर्गत वर्ग की भुजा चाहिये. जब वृत्त की त्रिज्या ५. और खण्ड की जीवा ८ है.

उत्त० १.९०८ वा ६.७०८. ॥

१४. एक वृत्तपाद की त्रिज्या, त है उस के अन्तर्गत वृत्त की त्रिज्या चाहिये. .. .. उ० $\frac{त}{१+\sqrt{२}}$

१५. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का सीमासूत्र = स दिया हुआ है कर्ण चाहिये. .. .. उत्त० स ($\sqrt{२}-१$) ॥

१६. एक सम त्रिभुज के सीमासूत्र और लंब का अन्तर = द. दिया है भुजा निश्चित करो .. .. ∴ उत्त० $\frac{२द}{६-\sqrt{३}}$

१७. एक समकोण त्रिभुज की भुजा १२ तथा दूने कर्ण और कोटि का अन्तर २१ है कोटि चाहिये. ..उत्त० ५. वा ६.

१८. एक त्रिभुज की दो भुजों का योग, स, तथा तीसरे के कोण के सम दो भाग कारक रेखा से घिरे हुए आधार के खण्ड क्रम से, ग, द, हैं भुजा चाहिये,

उत्त० $\frac{ग स}{ग+द}$ और $\frac{द स}{ग+द}$ ॥

१९. एक त्रिभुज का, फल = १६०, आधार = ४०, और एक भुजा २० शेष भुजा चाहियें, ... उत्त० २३.०६६, वा ५८.८७६. ॥

२०. समकोण त्रिभुज की भुज और कोटि, १२ और हैं. उस के अन्तर्गत, आयत की भुजा चाहिये जिस का त्रिभुज के फल से आधा है .. .. .. उत्त० ६ और ८ ॥

२१. सम त्रिभुज के भीतर एक बिन्दु से भुजाओं पर पड़े तीन लंब ४, ६, और ८ है, भुजाओं को निश्चित किया चाहिये. .. .. उत्त० $१०\sqrt{३}$

२२. एक वर्गक्षेत्र के कर्ण की सीध में मैं ने एक बिन्दु लेकर देखा तो वर्ग के समीप के कोणों से उसकी दूरी, ४०, और ६० हुई, वर्ग की भुज चाहिये, ... उत्त० २४ ६३. ॥

॥ इति रेखामितितत्वम् ॥